[論　説]

都市の時空間モデル
―― 都市の創出時間と成立の時間 ――

神　頭　広　好

Ⅰ　はじめに

本研究では、物理学の観点から、空間と時間の同時性と空間・高度距離のもとで、都市形成の秩序を考慮した場合の都市創出時間と空間完成時間としての都市成立（または完成）時間について分析を試みる。

ここでは、時間軸と空間軸の関係について説明しなければならないが、物理学ではどちらかを虚数の軸として、過去と未来を通じての空間的ゆがみといった社会科学とは程遠い概念が含まれているために、時間と空間は一体化しており、系において我々が作り上げたものは、全ての人が「時間」を費やした結果であると考える。これは、空間的行動はまちまちであっても、時間は平等に与えられていることをも含んでいる。ただし、ここでは3次元の系を考えているために、速度が不変であれば、高速であるかないかは必要ない。この意味において、ニュートンの絶対時間、ガリレオ変換系であり、ローレンツ変換などが意味する同時性の景観についての内容は無視される。

Ⅱ　時空間都市モデル

本モデルは、多種多様な民族が、港に到着して、そこから移動することによって、居住地としての立地点を決め、そこに建物を造り、都市を完成させていく物語である。経済理論では費用の節約から、まず都市は港に立地すると考えられるが、実際は、言葉とか風習、宗教などが異なる多種類の民族が一つになって港に大きな都市をつくることも考えられるが、ここでは、同じ民族か、その中でも意志の疎通するクラスターが、港以外の当該地点に都市を造ろうとすることから始まる。そこでは、ユークリッド空間[1]において、ピタゴラスの定理と相加・相乗不等式[2]から導かれる都市の成立（完成または成熟）までの時間距離とその最短時間距離としての「都市創出時間距離」が存在する。ただし、都市の立地点は、土地が有する比較優位性によって選択されたものと考える。

ここでの都市とは、距離と人間の集団（人口）によって成し遂げられた空間であり、港から立地点（＝創出点）までの移動距離と人口の大きさを代替する建物の高さ[3]によって成立するものとする。ここでの空間距離は、移動ベクトルと居住やビジネスのために建てられた建物の垂直ベクトルとの合成ベクトルの長さと捉える。この長さは、時間距離と一致していると考えることから、時間をなるべく節約して都市を造ろうとする人間の行動のあり方を示している。また、図１から、立地点が決まれば、そこから移動する距離（B-C）と建築高さの距離（B-A）が同一でも、都市の成立にかける時間が相対的に短いことが分かる。移動は個人の行動であるが、建設は集団の行動であるため、後者の方が前者よりも時間が短縮されると考えられる。図１における合成ベクトルの長さとしての空間距離と移動ベクトルと垂直ベクトルの総距離としての実際の空間行動距離との関係については、付録に掲げられている。

なお、本モデルについては、経過した時間（0-A）が、港からの移動距離（0-B）と建物の高さによる距離（B-A）によって、都市が完成されているという理解の方が分かり易い。

都市の時空間モデル

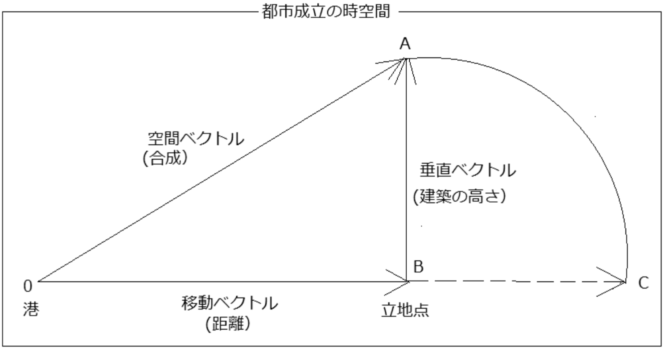

図 1

まず時空間都市モデルの構築にあたり、以下の諸仮定が設定される。

(1) 系において、空間距離と時間距離は比例する。空間÷時間＝1であることを意味する。

(2) 都市の形成において、空間行動距離は、原点としての港から人々が居住地点を探し、決定された地点に建物[4]ができるまでの総距離を指すが、それを達成する時間距離は、都市の平面座標と建物の高さから成る斜辺(図1における空間ベクトルの長さ) として、ピタゴラスの定理によって計算される。ただし、すべての人に平等に与えられる時間距離は、時速と時間から計算される。ただし、時速は1として絶対的なものである[5]。

(3) 建物の高さは、人口規模に比例的である。また、座標点はマクロにおいては地点を指すが、ミクロにおいては都市空間を意味している。

(4) 相加・相乗不等式を考慮して、相加平均にもとづく都市の成立時間距離と相乗平均にもとづく都市の創出時間距離として、都市の成立時間距離の最短時間距離が創出時間距離である。

(5) 最終的には都市においてランク・サイズの法則が成立する系としての都市圏が形成される。

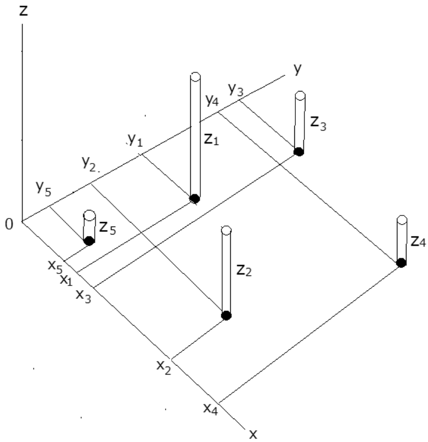

図 2

上記の仮定のもとで、都市が完成する時間距離は、

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = s(= ct) \qquad (1)$$

で表される[6]。ただし、図 2 から (x, y) は平面座標、z は (x, y) での建築物の高さ、c は不変の時速、t は系における人や原材料が港（原点）に到達したところからの時間をそれぞれ示す。また 3 次元空間を扱っているために x 軸上または y 軸上に都市は成立しない。また、上記の仮定⑵から時空間距離が最短であるのは、三角形の性質から、

$$\sqrt{x^2+y^2}+z > \sqrt{x^2+y^2+z^2} = s \qquad (2)$$

が常に成立する。これは、時間距離＜空間行動距離を意味している。

さらに、都市の創出時間距離は、s の最小値であるとすると、相加・相乗不等式から、

$$\hat{s} = \sqrt{3}\sqrt[3]{xyz} \qquad (3)$$

が導かれる。それゆえ、図 3 からピタゴラスの定理と相似定理を用いることによって、(1) 式および (3) 式から、都市創出から都市成立までの距離（また

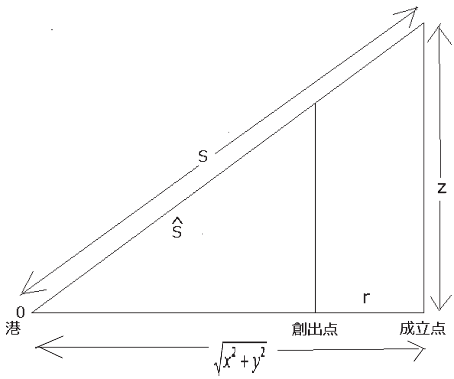

図 3

は都市の空間的幅）は、

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\left[1-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] \qquad (4)$$

である。ただし、r は創出から成立までの距離である。

図 4 は、(4) 式が $1 \leq x \leq 50$、$1 \leq y \leq 50$ および $z=1$ で描かれている。これについては、建物の高さが均一の場合、港から遠方へ行くほど都市の成立までの時間は長くなるが、x または y が最も遠く、x または y が、比較的近いところでは、相対的に都市の成立までの時間が短くなっているところがある。

ここで、時間の同時性よりも港に着く集団の時間が異なること、すなわち都市の成立時点が異なることを考慮すると、当該地点における建物の高さ[7]が、ランク・サイズの法則に従っているものとして、(1) 式を二乗した式に $x=x_n$、$y=y_n$、$z_n=\dfrac{z_1}{n^{\alpha}}$ を代入すると、

$$x_n^2+y_n^2+\left[\frac{z_1}{n^{\alpha}}\right]^2=s_n^2 \qquad (5)$$

で表される。(5) 式より、n 番目の都市が創出する時間距離は、空間距離の最

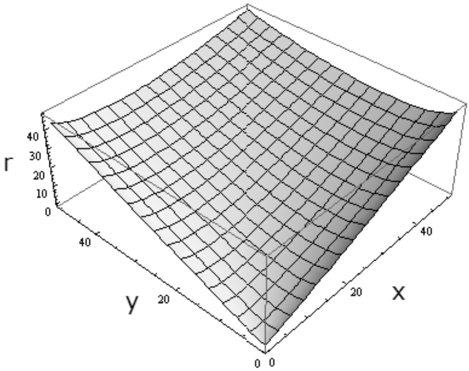

図 4

小値であるとすると、相加・相乗不等式の関係から、

$$s_n^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x_n^2 y_n^2 z_1^2}{n^{2\alpha}}} \tag{6}$$

で表される。さらに（6）式から、

$$s_n \geq \sqrt{3}\left[\frac{x_n y_n z_1}{n^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

で表される。したがって、(7) 式からランク n を最大の都市が創出される最短の時間距離（以後、創出時間距離）は、

$$\hat{s}_n = \sqrt{3}\left[\frac{x_n y_n z_1}{n^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{8}$$

である。(8) 式の右辺は、地点と建物の高さの一種の相互作用を示している。

ここで、東の方向を x、南の方向を y、建物の高さを z とすると、最初の都市[8]（以後、この都市はランク１である最大の都市）については、(8) 式の n を１に置き換えることによって、

$$\hat{s}_1 \geq \sqrt{3}\,(x_1 y_1 z_1)^{\frac{1}{3}} \tag{9}$$

で表される。(9) 式からランク１の都市の創出時間距離は、

$$\hat{s}_1 = \sqrt{3}\,(x_1 y_1 z_1)^{\frac{1}{3}} \qquad (10)$$

である。(8) 式と (10) 式から、ランク 1 の都市とランク n の都市との創出時間距離との関係は、ランク 1 の都市の建物を介すると、

$$\hat{s}_n = \sqrt[3]{\frac{x_n y_n}{x_1 y_1}}\frac{\hat{s}_1}{n^{\frac{\alpha}{3}}} \qquad (11)$$

である。(11) 式については、図 5 から、都市のランク n が大きく、平面と建物の高さから成る空間の格差係数 α が小さいほど、都市の創出時間距離が長いことを示唆している。また、立地点決定のために移動した範囲が少なくとも四角形の面積 xy に比例するとして、その面積がランク 1 の都市よりランク n の都市の方が大きい場合も、都市の創出時間が長いことを示している。ちなみに、$x_1y_1 = x_ny_n$ のとき、上式は通常形式のランク・サイズモデルとなる。図 5 は、

z_1=1、$0 \leq \frac{\alpha}{3} \leq 2$、$1 \leq n \leq 30$ で描かれている。

空間が無限であるとすれば、単なる累積ではあるが、すべての都市が創出する時間距離は、リーマンのゼータ関数から、例えば、α=6 のとき、

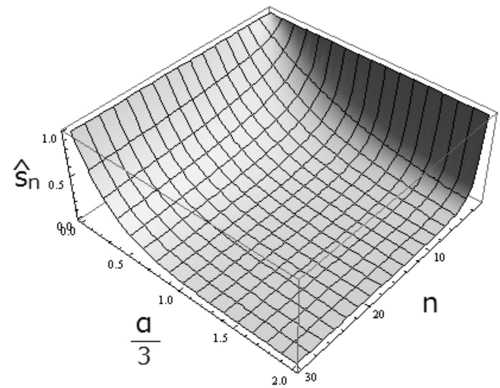

図 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n = \hat{s}_1\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right] = \hat{s}_1\frac{\pi^2}{6} \tag{12}$$

である。(12) 式から、ランク 1 の都市の創出時間距離が分かれば、無限の空間に創出する時間距離が決められることになる。

平面秩序を有する時空間モデル

ここでのモデルは、2 次元平面空間の秩序性と対称性を考慮して、原点 (例えば、移住者の着地港) から近いところから大都市、中都市、小都市と成立することが仮定される。(図 6 参照) それゆえ、移動の節約の観点からは、経済理論に近いモデルである。

図 6 から、平面秩序 (原点から 45 °線上) の時空間式は、$x_n = n$ および $y_n = n$ を (5) 式へ代入すると、

$$n^2+n^2+\left(\frac{z_1}{n^{\alpha}}\right)^2 = s_n^2 \tag{13}$$

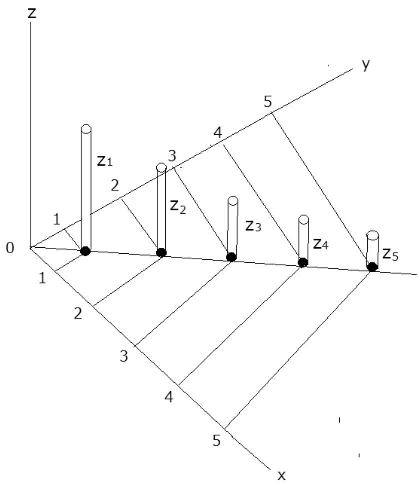

図 6

で表される。ここで、都市の数がかなり多いことを仮定すると、

$$\left(\frac{z_1}{n^{\alpha}}\right)^2 = z_1^2\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\alpha} \to 0 \tag{14}$$

である。(14) 式および (13) 式から、

$$s_n = \sqrt{2}\,n \tag{15}$$

を得る。したがって、(15) 式から、系におけるランク n の都市の成立時間距離は、建物の高さの格差係数αに関わらず、ランク n の $\sqrt{2}$ 倍であることを示している。

ちなみに、ランク1の都市の成立時間距離は、(13) 式に $n=1$ を代入することによって、

$$2+z_1^2 = s_1^2 \tag{16}$$

から

$$s_1 = \sqrt{2+z_1^2} \tag{17}$$

で表される。(17) 式および (13) 式から、

$$2n^2+\frac{s_1^2-2}{n^{2\alpha}} = s_n^2 \tag{18}$$

であり、(18) 式から、ランク n の都市の成立時間距離は、

$$s_n = \sqrt{2n^2+\frac{s_1^2-2}{n^{2\alpha}}} \tag{19}$$

で表される。

建物の高さ格差係数と都市成立時間距離との関係は、図7に描かれている。ただし、$1 \leq n \leq 5$ である。この図から、建物の高さ格差係数が小さいほど、ランク1の創出時間よりもランク2の創出時間距離は短い傾向にある。ランク3の都市からは、格差係数に関わらず、ランクが高い都市ほど創出時間距離が長くなる。その長さは、格差が小さいほど大きい。

(13) 式の相加・相乗不等式から、

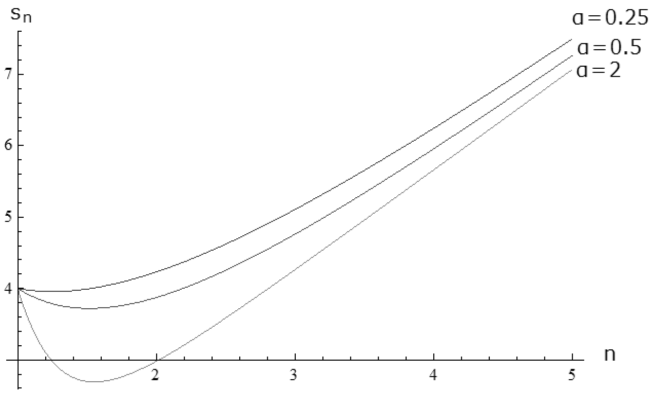

図 7

$$\frac{s_n^2}{3} \geq \sqrt[3]{n^4\left[\frac{z_1}{n^\alpha}\right]^2} \qquad (20)$$

または

$$s_n \geq \sqrt{3}\,(n^{2-\alpha}z_1)^{\frac{1}{3}} \qquad (21)$$

で表される。それゆえ、(21) 式から、都市創出の時間距離は、

$$\hat{s}_n = \sqrt{3}\,(n^{2-\alpha}z_1)^{\frac{1}{3}} \qquad (22)$$

である。(22) 式から、都市創出の時間距離は、 α＝2 のとき、ランクに関わらず z_1 のみで決定される。

図 8 は、(22) 式が $z_1=1$、$1 \leq n \leq 50$、$0 \leq \alpha \leq 3$ の範囲で描かれている。この図からランクの高い都市ほど、言い換えれば都市の数が多いほど、さらに建物の高さに格差がないほど系における都市の創出時間距離は増加する。一方、建物の高さの格差が相対的に大きい場合は、都市の数に関わらず、都市の創出時間距離は短い傾向にあることを示している。

ここで空間が無限であるとすれば、すべての都市が創出する時間距離は、リーマンのゼータ関数から、例えば、 α＝4 のとき、

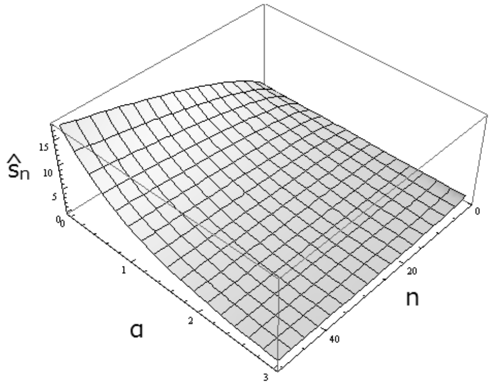

図 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n = \sqrt{3}\sqrt[3]{z_1}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right] = \sqrt{3}\sqrt[3]{z_1}\frac{\pi^2}{6} \tag{23}$$

である。(23) 式から、ランク 1 の都市の創出時間が分かれば、無限の空間に創出する時間距離が決められることになる。

同一の創出時間距離を有する都市の数

自然数の世界では、素数は、1 または自らの数でしか割れない数を表わす。したがって、同一の創出時間距離を有する都市の立地点は、2 か所に限定される。素数定理[9]から、自然数 p に対して $u \leq p$ となる素数 u の個数は、

$$p \to \infty \text{ のとき、} G(p) \approx \frac{p}{\log p} \tag{24}$$

で表わされる。

ここで、人口に比例的である都市の建物の高さを一定として、系における都市数を p とすると、(24) 式から、つぎの 2 つのケースに分けることができる。

(1) 同一の創出時間距離を有する都市が 1 ペア（$(u, 1)$ と $(1, u)$）である

都市数：$\dfrac{p}{\log p}$

⑵　同一の創出時間距離を有する都市が 1 ペア以上ある（素数でない）都市数：$p-\dfrac{p}{\log p}$

である。さらに、上記 2 つのケースの比率（⑵/⑴）は、

$$h=\frac{1-\dfrac{1}{\log p}}{\dfrac{1}{\log p}} \qquad (25)$$

で表わされる。(25) 式は、図 9 に描かれている。ただし、$1000 \leq p \leq 5000$ である。

この図から、⑴の素数の 1 ペアにおける都市数に対して⑵の同一の創出時間距離が 1 ペア以上である都市数は、系（または都市圏）が大きくなるほど、相対的に逓増していくことが分かる。

ちなみにオイラーによると、自然数を n とすると、$n=1$ から $n=39$ までは、n^2+n+41 の数値は、すべて素数になる[10]。

ここで、建物の高さにおいて、ランク・サイズの法則が成立しているとすると、素数の規則性が見られる範囲においては、都市の創出時間距離は、

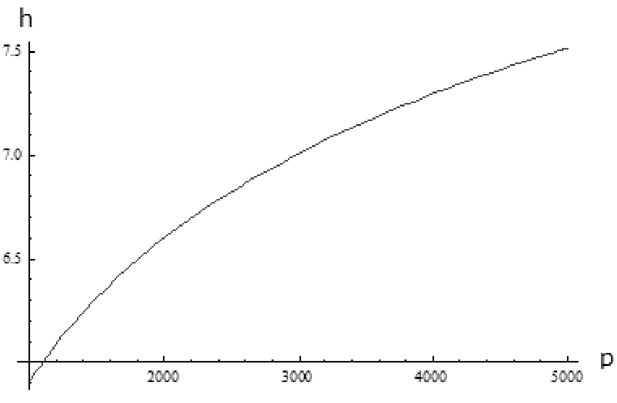

図 9

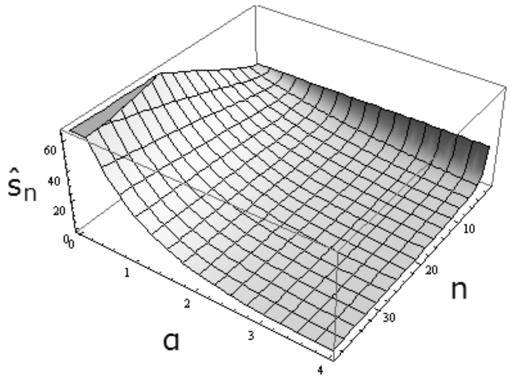

図 10

$$s_n = \sqrt{3}\sqrt[3]{(n^2+n+41)^2 \frac{z_1^2}{n^{2\alpha}}} \qquad (26)$$

で表される。ただし、ランク 1 都市の立地点は、(x, y) 座標において (1, 43) または (43, 1)、z_1 はランク 1 都市の建物の高さ、n は都市のランク (または都市数) を示している。また、図 10 は、(26) 式が $0 \leq \alpha \leq 4$ および $1 \leq n \leq 39$ の範囲で描かれている。この図から、都市の建物の高さ格差が小さい ($\alpha \leq 1$) ほど、また都市のランクが大きい (または都市数が大きい) ほど、創出時間距離は大きくなる。一方、都市の建物の高さ格差が大きい ($1 \leq \alpha$) ほど、都市のランクが大きい (または都市数が大きい) ほど、創出時間距離は小さくなる。

ここで、ランク 1 の都市を系における最大都市または中心都市とすると、素数の性質から系において、中心都市から遠方にある都市ほど、時間をかけて都市化された都市が建設されていることを物語っている。

III　おわりに

本研究では、空間、空間行動および時間を距離という尺度のもとに、また都

市における建物の高さに対してランク・サイズの法則としての秩序性を導入することによって、都市の成立時間距離と創出時間距離を時空間の相加・相乗不等式から導いた。系において、都市創出の時間距離は、都市のランクが大きく、平面と高さから成る空間の格差が小さいほど、都市の創出時間距離が長いことが分かった。そこでは、立地点の探索領域としての四角形の面積が関わっていることが考察された。平面の秩序性については、ランクが大きくなる（または都市数が多くなる）ほど、都市成立の時間距離が長くなることが分かった。ただし、そこでは、系における建物の高さ格差が大きいほど、ランク 2 の都市の成立時間距離が短いことが考察された。最後に、創出時間距離が 3 つの軸からなる積で表わされることから、素数定理を用いて同一の創出時間距離を有する都市の数 39 までにおいて、その数が素数であるか、否かの 2 つのケースに分けられ、創出時間距離が同一である都市が相対的に逓増していくことが分かった。

今後、難問ではあるが、平面、建物の高さを要素とする相乗平均の意味や創出される都市の立地点について明らかにする必要がある。

付録：時間距離と空間行動距離

(1) 式から時間距離は、

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = s \tag{1–1}$$

である。一方、実際の空間行動距離は、

$$\sqrt{x^2+y^2}+z = f \tag{1–2}$$

である。(1-1) 式および (1-2) 式から、

$$s = \sqrt{(f-z)^2+z^2} \tag{1–3}$$

が導かれる。したがって、(1-3) 式から、$f=z$ のとき、$s=z$ である。このことは、原点である港に高さ z の建物を造るときの最短時間距離が、z であることを示している。

注

1　ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学については、Stillwell（2006、訳出、第5章）で説明されている。
2　この不等式を都市の集積経済効果に応用したものに、神頭（2013）がある。
3　人口の大きさは、企業の大きさに比例している。それゆえ、人口が大きいことは、限られた土地面積において、建物の高さを増加させることを意味している。
4　都市を構成するマンション、オフィスビル、ショッピングセンターなどの建物である。
5　これは、物理学で明らかにされている光速としても構わない。
6　これは、ミンコフスキー空間の不変量をゼロとしている。すなわち、ここでは、単純化のために空間軸と時間軸を同じ軸としている。4次元の空間については、Einstein（1916、訳出、付記)、都筑（1969、第6章)、今枝（1982、第3章)、Russell（2008、訳出、pp. 32-43)、竹内（2013、第4章）を参照せよ。
7　これは、一種の都市化の指標と考えられる。
8　この都市は、人口規模が最大の都市であり、それゆえ建築物の高さが最大を誇っている。
9　この定理は、1896年に、J. S. Hadamard および C. J. de la Vallee-Poussin によって同時期に証明されている。これについては、寺澤（2006、p. 135）および青山・家富・池田・相馬・藤原（2008、第5章）を参照せよ。
10　これについては、Crilly. T. and Blackburn. S（2011、訳出、pp. 58-59)を参照。

参考文献

Crilly. T. and S. Blackburn (2011) *The Big Questions: Mathematics,* Quercus Edition Limited（邦訳―熊谷玲美（2014）『ビッグクエスチョンズ　数学』ディスカヴァー・トゥエンティワン)

Einstein, A. (1916) *Uber Die Spezielle und Die Allgemeine Relativitatstheorie,* The Hebrew University, Jerusalem, Israel（邦訳―金子務（2004）『特殊および一般相対性理論』白揚社)

Russell, S. (2008) *Relativity: A Very Short Introduction,* Oxford University Press（邦訳―新田英雄（2013）『相対性理論―常識への挑戦―』丸善出版)

Stillwell, j. (2006) *Yearning for the Impossible: The Surprising Truths of Mathematics,* A K Peters, Ltd.（柳谷晃監訳、内田雅克・柳谷晃訳（2014）『不可能へのあこがれ―数学の驚くべき真実―』共立出版)

青山秀明・家富洋・池田裕一・相馬亘・藤原義久（2008）『経済物理学』共立出版

今枝国之助・今枝真理（1982）『ブラックホール物理学―時間・空間・物質を超えて―』講談社

神頭広好（2013）『都市化の集積経済効果と空間距離』愛知大学経営総合科学研究所叢書41、愛知大学経営総合科学研究所

新海裕美子・ハインツ・ホライス・矢沢潔（2011）『次元とはなにか』ソフトバンククリエイティブ
竹内淳（2013）『高校数学でわかる相対性理論』講談社
都築卓司（1969）『四次元の世界―超空間から相対性理論へ―』講談社
寺澤順（2006）『πと微積分の 23 話』日本評論社