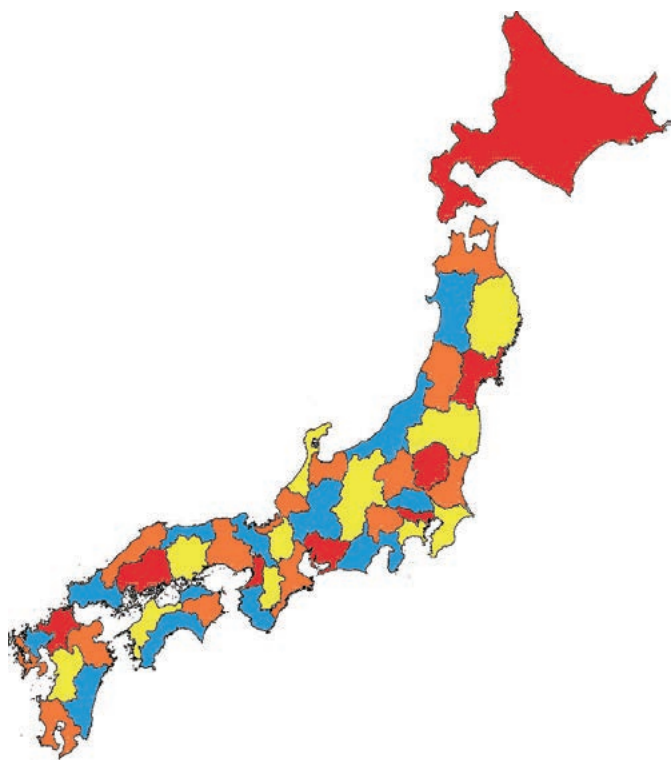


立地と空間の秩序

神頭広好・竹内啓仁・加藤好雄・野呂純一 著



はしがき

本叢書は、「立地と空間の秩序」をテーマとして4つの論文から構成されている。

第1章では、ランク・サイズモデルの空間的解釈を可能にすることによって、そこでは企業密度としての集積のもとで実際に応用可能な中心都市と周辺都市の企業集積の相互作用指数を導出している。

第2章では、税収のもとでの住民と企業から成る都市の効用を最大化するモデルに外部性を組み込んだ実証可能な都市の最適規模モデルを構築している。

第3章では、観光の外部性を導入した観光密度と観光入込客数に関するモデルを構築して、それを日本の政令指定都市に応用している。

第4章では、本研究所紀要『経営総合科学』第121号に掲載された論文「四色問題におけるエレガントな解」を、さらにカラー化して簡潔にまとめている。

ちなみに、四色問題については経営立地論Ⅱの講義の中で、学生に自由な白地図を描いてもらい、その地図に私の理論に沿って塗り分けると、四色あれば地図が塗り分けられることが分かり、学生の感動している姿が目につかびます。

これまで四色問題に挑戦されてきた研究者の方々へ謝意を表します。

最後に、今回の叢書で64回目を迎えるに当たり、これまで長い間、個人的にも、プロジェクトにおいても執筆する機会を与えて下さった本学経営総合科学研究所に感謝する次第です。

2025年7月7日

執筆者代表 愛知大学名誉教授
神頭広好

立地と空間の秩序

目 次

はしがき

第1章 企業立地と大都市圏の構造

ーランク・サイズモデルにもとづいてー

.....神 頭 広 好 1

第2章 財政にもとづく都市の最適規模

.....竹 内 啓 仁

加 藤 好 雄

神 頭 広 好 19

第3章 観光における外部性の転換点と観光最適密度

ー政令指定都市を対象とした実証分析ー

.....野 呂 純 一 29

第4章 全ての地図は四色あれば塗り分けられる

.....神 頭 広 好 45

第1章 企業立地と大都市圏の構造 ーランク・サイズモデルにもとづいてー

神 頭 広 好

はじめに

ランク・サイズモデルは、ジップの法則とも呼ばれており、地理学において都市と人口を対象にしたものが多く見られる。また、対象が人口以外にもランク・サイズモデルが、当てはまる事象が多く存在する。これらを踏まえ、Krugman (1996) は空間経済学にランク・サイズモデルを応用した場合の不思議な現象に対して言及している。なお、Simon (1955) は確率論的立場から、Kozu (2018) は大都市圏の流入人口のパターンから、それぞれランク・サイズモデルの理論的根拠について説明している。

ここでは、ランク・サイズモデルに都市空間を導入することによって、補完する2つの空間的ランク・サイズモデルを構築する。まず空間的ランク・サイズモデル A において、大都市圏の拡大に伴う都市数の増加によるランク1である中心都市の企業集中度、中心都市と全周辺都市（以後、周辺都市）との企業数比および企業立地密度との相対的關係性について分析する。ついで企業密度をアクセスとしての集積の経済効果として捉え、中心都市と周辺都市の企業の集積（またはネットワークの外部性）による相乗効果について分析する。さらに、企業数格差を1とした空間的ランク・サイズモデル B では、上記のモデル A と同様な分析を行う¹。

¹ 本稿は、2025年度において最後となる「経営立地論 I」の講義内容の一部をまとめたものである。

ランク・サイズモデルの空間的様相

一般的にランク・サイズモデルは、

$$P_n = \frac{P_1}{n^b} \quad (1)$$

で表される。ただし、 P_1 はランク1である中心都市の最大企業数、 n は企業数 P_n における都市の順位、 b は都市間の企業数格差を表す係数である。

また、これまでランク・サイズモデルにおいて都市の形状について言及されていないが、それぞれのランクの間隔が1であることから、この1を各都市の面積として、現在の都市において、自治体に属さない土地はほとんど存在しないために2次元平面において、正三角形（図1（1））および正方形（図1（2））、正六角形（図2）の都市の配置となる。これについては、中心都市と周辺都市の企業密度を導くために、本論では都市の面積が重要なファクターとなる。なお、これまでのランク・サイズモデルの様に、ランクを単なる都市の企業数の順位とすると都市の形状や大きさについて言及する必要はない。

ところで、図1における正三角形および正方形の都市の番号については、中心都市が最も企業数が多く、1位であり、中心都市と最も近く、点ではなく、長辺で接している周辺都市が中心都市からの影響力を受けているという観点から、図1（2）において2、3、4、5番目の都市が決まる。この4つのランクは入れ替えても構わない。つぎにランクが高い都市同士の影響によってランク6、7、8、9の4つの都市が大都市圏に含まれることを示唆している。

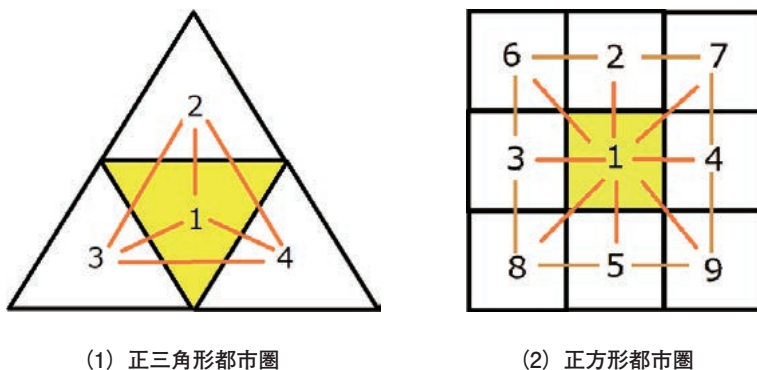


図 1

注) 黄色は中心都市をオレンジの直線は、都市間を結ぶ道路または鉄道をそれぞれ示す。(図 2 同様)

図 2 におけるランクは、中心都市とのアクセスにおいて全ての周辺都市に対して同一であるためにランク（順番）において意味はない。また、オレンジ線と黒の境界線が交わる所は集積が起これやすい周辺都市間の中間地点を指している。この中間地点を結んでいくと、正六角形の構造が出来上がる²。

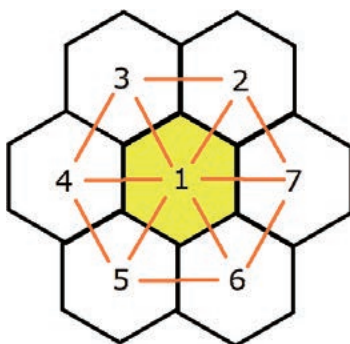


図 2 正六角形都市圏

² この様な正六角形の都市の構造については、Christaller (1933) を参照せよ。

以下では、中心都市とそれを除く周辺の都市数との比および都市面積の比の考え方を導入した空間的ランク・サイズモデルを構築する。

空間的ランク・サイズモデル A

モデルの構築にあたり、以下の諸仮定が設定される。

- (1) 大都市圏におけるランク1の都市は企業数が最も多い中心都市であり、その周辺の全ての都市を合わせて、ここでは周辺都市とする。この分け方の意味は、中心都市に集中している企業の多くは、本社機能を有しており、情報サービス業、外資系の企業、公的な企業などが多く、周辺の都市に立地している企業は、支所、支店的役割を有する企業、製造業、運輸業などが比較的多く見られることにもとづいている。
- (2) ランク・サイズモデルのランクは自然数で表されており、仮定(1)から大都市圏の都市数を m とすると、中心都市と周辺都市の都市数の比は、 $1 : m-1$ である。また、それが面積比においても同じとすると、周辺都市は周辺のすべての都市の和であることから、周辺都市に属する各都市の面積については、 $m-1$ の範囲内において規則性が存在しなくても構わない。
- (3) ここでは、空間的なシミュレーションをし易くするために、積分によって大都市圏周辺都市の企業数が計算される。
- (4) 企業密度は企業間のアクセス度を示しており、この密度の大きさは集積の経済効果の大きさを示す。そこで、中心都市と周辺都市の企業密度の積としての相乗効果を、ここでは「企業集積の相互作用指数」と呼ぶ。

空間を考慮して、(1) および仮定(3) から、大都市圏の総企業数 P は、

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + \int_1^m \frac{P_1}{n^b} dn = P_1 + P_1 \left[\frac{(1/n)^{b-1}}{1-b} \right]_1^m = P_1 + P_1 \left(\frac{(1/m)^{b-1}}{1-b} - \frac{1}{1-b} \right) \\
 &= P_1 + \frac{P_1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

で表される。ただし、 $b \neq 1$ である。

中心都市の企業数の集中度（企業集中度） C は、

$$C = \frac{P_1}{P} = \frac{P_1}{P_1 + \frac{P_1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right)} \tag{3}$$

で表される。(3) は、 $0.5 \leq b \leq 1.5$ 、 $2 \leq m \leq 100$ の範囲で図 3 に描かれている。

図 3 から、中心都市の企業集中度 C については、企業数格差係数 b が大きくなると増大するが、その格差係数 b が小さく、都市数 m が小さいほど増大する。

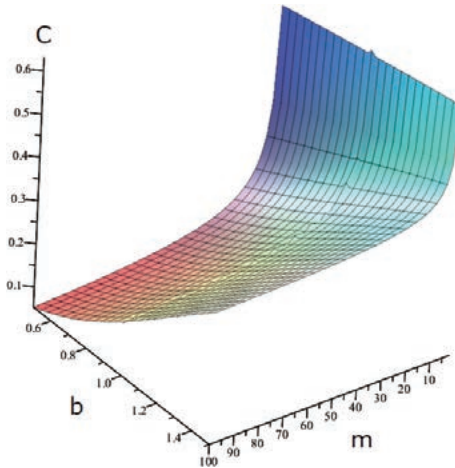


図 3

注) 上図は、Maple によって描かれている。(図 4、図 5、図 6 同様)

また、「中心都市」と「周辺都市」（以後、「中心都市—周辺都市」にて表示）の企業数の比（企業数比） S は、

$$S = \frac{P_1}{P - P_1} = \frac{P_1}{P_1 + \frac{P_1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right) - P_1 \left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1} = \frac{1-b}{\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1} \quad (4)$$

で表される。（4）は、 $0.5 \leq b \leq 1.5$ 、 $2 \leq m \leq 100$ の範囲で図4に描かれている。

図4から、企業数比 S は都市数 m が少ないほど急激に増大するが、企業数格差係数 b が大きいほど、 S は大きくなる。

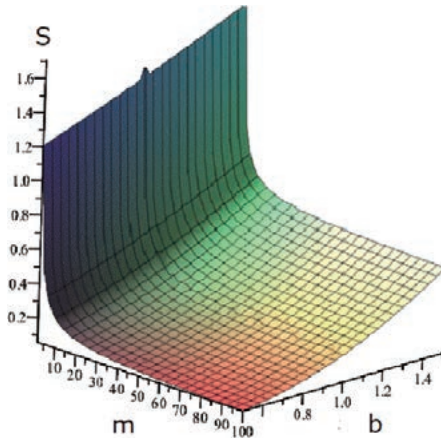


図4

さらに、中心都市—周辺都市の企業密度比 $\hat{S}$ は、

$$\hat{S} = \frac{P_1/1}{(P - P_1)/(m-1)} = \frac{P_1}{\frac{P_1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right) / (m-1)} = \frac{(1-b)(m-1)}{\left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right)} \quad (5)$$

で表される。（5）は、 $0.5 \leq b \leq 1.5$ 、 $2 \leq m \leq 100$ の範囲で図5に描かれている。

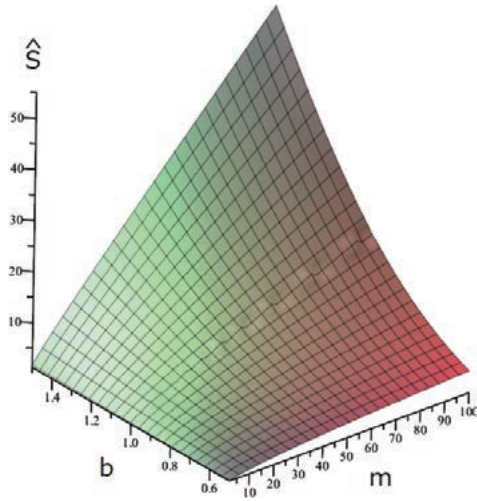


図 5

図 5 から、企業密度比 $\hat{S}$ は企業数格差係数 b が大きく、都市数 m が多いほど急に増大する。

これについては、中心都市の企業密度と比例して集積の経済効果が高く、これを享受しようと、周辺都市の企業が中心都市へ移動することを物語っている。

(5) の第 3 項における分子の中心都市の企業密度および分母の周辺都市の企業密度を乗じた値である企業集積の相互作用指数 I は、

$$I = \frac{1}{(1-b)(m-1)} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right) \quad (6)$$

で表される。ただし、ここでは P_1 が消去されているため P_1 は 1 とみなされる。((8) および (16) 同様) (6) は、 $0.5 \leq b \leq 1.5$ 、 $2 \leq m \leq 100$ の範囲で図 6 に描かれている。

図 6 から、企業数格差係数 b が大きく、都市数が多く、相対的に都市面積が大きくなるほど企業集積の相互作用指数 I は減少傾向にある。また、その指数 I

は都市の数が少ないほど急激に大きくなる。

これらを整理すると、主として大都市圏の都市数が少く、都市間の企業数格差が小さいほど、企業集積の相互作用指数が大きいことを示している。

ちなみに、(6) から、 $m \rightarrow \infty$ ならば b に関わらず $I=0$ 、 $m \rightarrow 2$ かつ $b \rightarrow 0$ ならば $I=1$ である。さらに、図6から察すると、 I の範囲は $0 < I < 1$ であると言える。

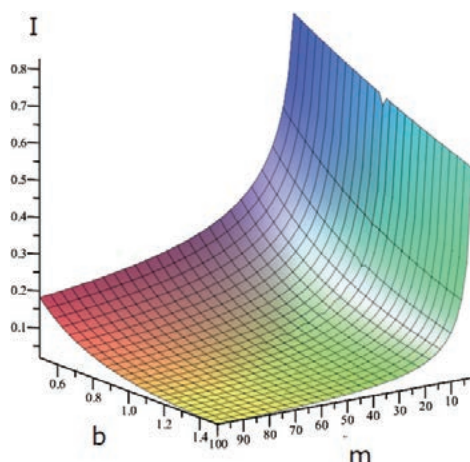


図6

東京大都市圏および名古屋大都市圏における企業集積の相互作用指数

ここで東京および名古屋の2つの大都市圏を選択した理由は、それぞれ大きな中心都市から交通網が全域的に広がっているためである。また、それぞれの大都市圏における空間的大きさは、総務省の京浜葉大都市圏および中京大都市圏の空間範囲にもとづいている³。企業のデータについては、2021年の総務省・経済産業省「経済センサス基本調査」「経済センサス活動調査」による事業所デー

³ これについては、統計局ホームページ/統計表で用いられる地域区分の解説を参照。(以下同様)

タを採用した。

上記の分析は、視覚可能な 3 次元モデルの中での結果であって、実際には (5) から、

$$\hat{S} = \frac{P_1 / A_1}{(P - P_1) / A_2} = \frac{P_1 / A_1}{\frac{P_1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right) / A_2} = \frac{(1-b)A_2}{\left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right) A_1} \quad (7)$$

で表される。ただし、 A_1 は中心都市の面積を、 A_2 は周辺都市の面積をそれぞれ示す。(以下同様)

さらに、(7) の第 3 項から企業集積の相互作用指数は、

$$I = \frac{1}{1-b} \left(\left(\frac{1}{m} \right)^{b-1} - 1 \right) / A_1 A_2 \quad (8)$$

で表される。

(8) については、中心都市も周辺都市も空間的に小さいほど、企業密度が高まるために企業集積の相互作用効果が大きくなることを示している。

(a) 東京大都市圏のケース

東京特別区の中心から半径約 70km 圏を東京大都市圏とすると、中心都市（特別区）を 1 つとして 190 都市⁴ある。

(1) を対数線形に直した関数を東京大都市圏のデータに応用すると、

$$\log P_m = 13.19 - 1.31 \log m \quad (9)$$

(56.82) (-24.68)

が導かれる。ただし、決定係数：0.76、() 内の数値は t 値を示す。

(9) については、図 7 に描かれている。

⁴ この都市数は Mapinfo を用いて導かれている。(名古屋市も同様) また、大宮市、千葉市、横浜市、川崎市、相模原市などは、それぞれ区の数ではなく、1 つの都市としている。

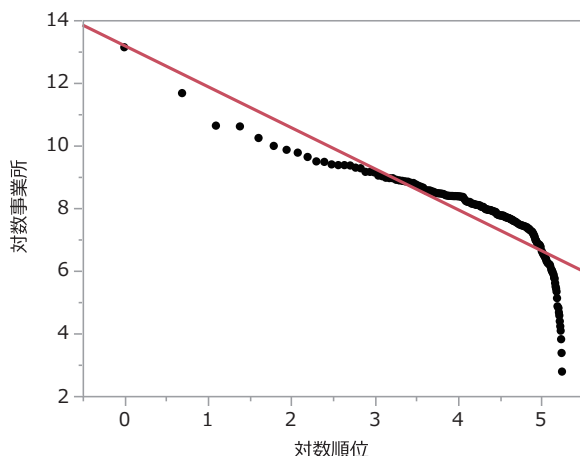


図 7

注) 上図は、Jmp により作成 (図 8 同様)

ここで、 $b=1.31$ 、都市数 $m=190$ 、中心都市である東京特別区の面積を覆う円の半径は約13kmであり、大都市圏の半径は70kmである。したがって、東京特別区とその周辺の面積は、 $A_1=169\pi$ および $A_2=4731\pi$ である。大都市圏の中心は若干ずれるが、これらを(8)へ代入すると、 I はかなり小さな数になるために、特別区を中心に $A_1=1$ とすると、 $A_2=27.99$ であり、これらを(8)へ代入すると、 $I=0.09$ が導かれる。

(b) 名古屋大都市圏のケース

名古屋市の市役所から半径約50km圏を名古屋大都市圏とすると、中心都市(名古屋市16区)を1つとして86都市ある。

上記(a)と同様に分析すると、

$$\log P_m = 11.56 - \underset{(75.18)}{1.16} \log m \quad (10)$$

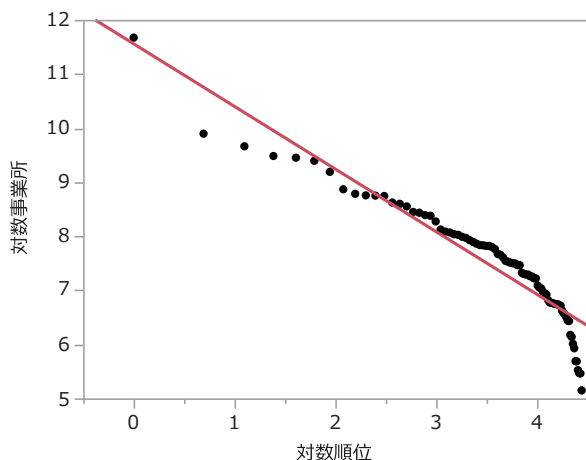


図 8

が導かれる。ただし、決定係数；0.76、() 内の数値は、t 値を示す。

(10) については、図 8 に描かれている。

ここで、 $b=1.16$ 、都市数 $m=86$ 、中心都市としての名古屋市の面積を覆う円の半径は約 9.5km であり、大都市圏の半径は 50km である。したがって、名古屋市とその周辺の面積は、 $A_1=90.25\pi$ および $A_2=2409.75\pi$ である。大都市圏の中心は若干ずれるが、これらの値を (8) へ代入すると、 I はかなり大きな数になるために、上記同様に $A_1=1$ とすると、 $A_2=26.7$ であり、これを (8) へ代入すると、 $I=0.12$ が導かれる。

ちなみに、図 7 および図 8 から東京大都市圏および名古屋大都市圏双方とも、ランク (順位) がかなり低いほど企業数が激減している傾向を示している。これは、後者よりも前者ほど顕著に見られる。さらに、東京大都市圏の企業集積の相互作用指数は、名古屋大都市圏のそれよりも小さい。これについては、東京大都市圏の空間的範囲が名古屋大都市圏のそれよりも大きいこと、また各大都市圏の企業特性にもとづいているように見える。

空間的ランク・サイズモデル B

ここでのランク・サイズモデルは、

$$P_n = \frac{P_1}{n} \quad (11)$$

で表される。ただし、(11) は (1) における $b=1$ の場合を示している⁵。

大都市圏における企業の総数 P は、上記の仮定を踏まえ、

$$P = P_1 + \int_1^m P_n dn = P_1 + \int_1^m \frac{P_1}{n} dn = P_1 + P_1 [\log n]_1^m = P_1(1 + \log m) \quad (12)$$

で表される。ただし、 m はランクと大都市圏における都市数を示している。また、都市の数が 1 であれば中心都市だけが存在することを示している。

中心都市の企業数の集中度 C は、

$$C = \frac{P_1}{P} = \frac{P_1}{P_1(1 + \log m)} = \frac{1}{1 + \log m} \quad (13)$$

で表される。

また、中心都市一周辺都市の企業数比 S は、

$$S = \frac{P_1}{P - P_1} = \frac{P_1}{P_1(1 + \log m) - P_1} = \frac{1}{\log m} \quad (14)$$

で表される。(13) および (14) については、それぞれ $2 \leq m \leq 30$ の範囲で図 9 に描かれている。

図 9 から、 C および S は、大都市圏における都市数 m の増加に伴って、徐々に低下して行くことを示している。

これについては、 C および S は、中心都市の企業数が所与であることにもとづいている。

⁵ これは、空間的ランク・サイズモデル A を補完するためである。

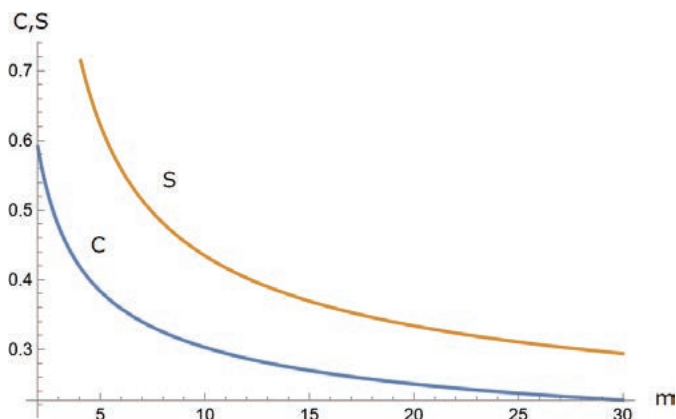


図 9

注) 上図は、Mathematica によって描かれている。(以下の図、同様)

中心都市一周辺都市の企業密度比 $\hat{S}$ は、

$$\hat{S} = \frac{P_1/1}{(P-P_1)/(m-1)} = \frac{1}{\log m / (m-1)} = \frac{m-1}{\log m} \quad (15)$$

で表される。ただし、モデル A 同様に中心都市の面積は 1 であり、周辺都市の面積は $m-1$ である。

(15) は、 $2 \leq m \leq 30$ の範囲で図10に描かれている。

図10から、大都市圏の都市数が増加するにつれて、相対的に中心都市の企業密度が高まって行くことを示唆している。

これについては、大都市圏の拡大（都市数の増加）によって、中心都市の集積の経済が相対的に高まっていくことを物語っている。

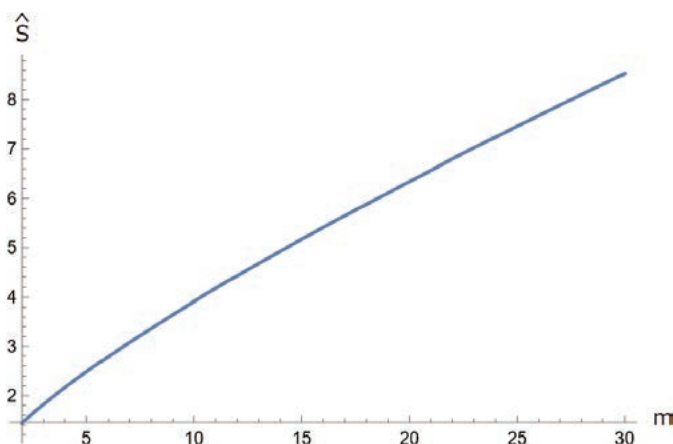


図10

さらに、(15) の第3項から、分子の中心都市の企業密度および分母の周辺都市の企業密度を乗じた値である企業集積の相互作用指数 I は、

$$I = \frac{\log m}{m-1} \quad (16)$$

で表される。(16) は、 $2 \leq m \leq 30$ の範囲で図11に描かれている。

図11から、都市の数が増えていくと、集積としての企業密度による相互作用が徐々に弱まっていく。

これについては、大都市圏の拡大の割には企業数の増加が徐々に減っていくことから、周辺都市の企業密度が低くなるために企業集積の相互作用指数が低下することを示唆している。

ちなみに、 $m \rightarrow \infty$ ならば $I \approx 0$ 、 $m \rightarrow 2$ ならば $I \approx \log 2 \approx 0.7$ である。したがって、 I の範囲は $0 < I < 0.7$ である。

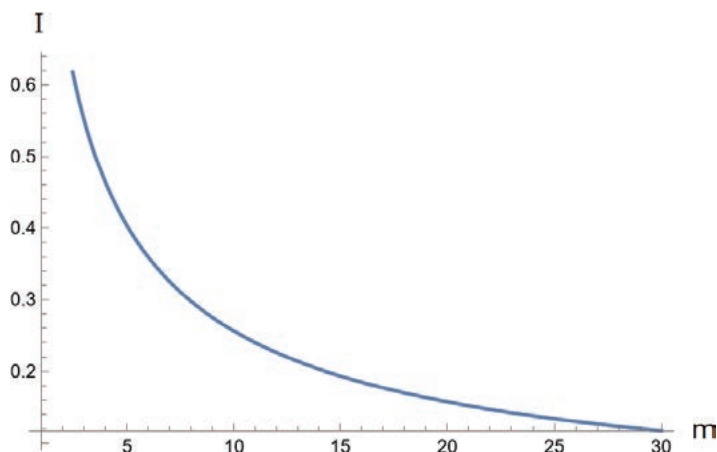


図11

上記を要約すると、以下の通りである。

- (i) (13)、(14) および図9から、大都市圏が拡大するほど中心都市の集中度および相対的に中心都市の企業数が減少する。これはランク・サイズモデルの性格上、中心都市の企業数が固定されているためである。
- (ii) (15) および図10から、中心都市一周辺都市の企業密度の比は、大都市圏が拡大することによって、都市が増えるにつれて中心都市の企業密度は相対的に増加する反面、都市面積が増える割には、企業数が減少していくために周辺都市の企業密度が低下することを示唆している。
- (iii) (16) および図11から、大都市圏が拡大して、都市数が増加していくと、中心都市の企業密度が変わらなければ、周辺都市の企業密度は徐々に低下するために、集積経済効果の積である相互作用が徐々に低下していく。これは、中心都市の企業数を増加させ、企業密度としての集積経済を上昇させることによって、周辺都市との相互作用を強めることを示唆している。

上記のモデル B の分析結果は、以下に整理される。

大都市圏拡大（都市数 m の増加）による中心都市の企業集中度 C 、中心都市—周辺都市の企業数比 S 、中心都市—周辺都市の企業密度比 $\hat{S}$ 、中心都市—周辺都市による企業集積の相互作用指数 I の変化：

$$m \uparrow \rightarrow C \downarrow$$

$$m \uparrow \rightarrow S \downarrow$$

$$m \uparrow \rightarrow \hat{S} \uparrow$$

$$m \uparrow \rightarrow I \downarrow$$

おわりに

これまでのランク・サイズモデルに関する研究の多くは、単なる都市間の人口格差および施設数格差を示す係数を比較するだけに留まっているように見える。

本研究では通常のランク・サイズモデルに都市空間を導入することによって、空間的ランク・サイズモデル A では、中心都市と周辺都市の相対的な企業密度から企業集積の相乗効果を示す相互作用指数を導くことができた。そこでは、ランク・サイズモデルの格差係数を推計することによって、それと大都市圏の都市数だけで企業集積の相乗効果が指数として簡単に計算することができる。さらに、その指数を東京大都市圏および名古屋大都市圏に応用した。また、空間的ランク・サイズモデル B では、企業数格差係数が 1 である場合であり、都市数のみで企業集積の相乗効果指数が計算される。

総じて、ランク・サイズモデルが有する空間的秩序から、大都市圏の企業の集積による相乗効果を理論的に説明できたことは有意義なことと考える。

今後は、ここで構築されたモデルをベースとして実証可能なモデルへと発展させる必要がある。また、中心都市の集積の経済が発現する空間的プロセスを明らかにすることが課題として残される。

最後に、ランク・サイズモデルは、ほとんどの事象において当てはまるために、このモデルを使えば、複雑な中心都市のネットワーク密度を避けて、周辺都市のネットワーク密度から中心都市のネットワークを導き出すことが可能となる。このアイデアから、飛躍しすぎかもしれないが、ここに $P \neq NP$ 問題を解くカギが隠されているのではないかと考える次第である。

参考文献

- Christaller, W. 1933. *Die zentralen Orte in Suddeutschland*, 331S. Jena: Gustav Fischer.
- Kozu, H. 2018. “City System Based on the Rank-Size Rule” *Location Analysis of Firms’ Activities from a Strategic Perspective*, ed. Ishikawa. T, Springer.
- Krugman, P. 1996. *The Self-Organizing Economy*, Blackwell (北村行伸・妹尾美起『自己組織化の経済学』東洋経済、1997年)
- Simon, H. 1955. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, pp.425–440.

第2章 財政にもとづく都市の最適規模¹

竹内 啓仁・加藤 好雄・神頭 広好

1. はじめに

都市の最適規模に関する研究は、主に公共経済学および都市経済学の分野でなされてきた。まず、ミクロ経済理論を用いたものに都市の効用最大化理論、また Stiglitz (1977)、Atkinson and Stiglitz (1980)、Rubinfeld (1987) による地方公共財の理論²、さらには都市の需給バランスを考慮した坂下 (1994) などがある。これらの理論を観光都市の規模に応用したものに神頭 (2006) がある。ちなみに、公共性のある空間を扱う研究のベースとなる公共経済学の一般的テキストとしては、Stiglitz (2000) が有名である。

一方、最適な人口規模および公共サービスの効率性については、経営工学的な観点から費用－便益分析および費用－有効度分析などが都市に応用されている。

ここでは、都市の経営に照準をあてて、税収のもとでの都市の効用（または活気）最大化を考慮したモデルを構築する。さらに、このモデルを日本の自治体に応用する。

2. 都市効用モデル

ここでは、税収および補助金を通じて公共サービスが人の移動と企業の立地

¹ 本稿は、第56回日本地域学会全国大会（2019年、久留米大学）において発表されており、これに加筆修正を加えたものである。

² この理論の評論としては、宇沢弘文・小川善弘（1989年、pp.2-10）がある。

を介して都市の効用を最大化させるモデルを構築する。

モデル構築に当たり、以下の諸仮定が設定される。

- (1) 都市の効用は、人口数としての人口規模と企業数としての企業規模から成る。
- (2) 住民と企業の総税収のもとで都市の効用の最大化がもたらされる。また、それぞれに課される税金は人口および企業を呼び込むための政策に支出される。
- (3) 特定化した都市の効用関数には、人口規模および企業規模、さらには、それらの規模と関連する都市の空間的特性である交通条件、地理的形状および土地利用などが外部経済効果および外部不経済効果に関わっている。

上記の仮定のもとで、都市の効用関数は、

$$u = u(p, f) \quad (1)$$

で表される。ただし、 u は都市の効用、 p は人口規模、 f は企業規模をそれぞれ示す。

つぎに、税収³の制約式は、

$$g = pt_p + ft_f \quad (2)$$

で表される。ただし、 g は総税収、 t_p は住民当り税収（所得税および住民税等による税収）、 t_f は企業当り税収（所得税および法人税等による税収）をそれぞれ示す。

まず（1）および（2）から、都市の効用の最大化の条件を求めるためにラグランジュ関数は、

$$S = u(p, f) + \lambda(g - pt_p - ft_f) \quad (3)$$

で表される。人口による効用最大化の条件は、（3）を p で微分すると、

³ ここでは、自治体側からの税収は企業および住民側からの課税を意味する。

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial p} - \lambda t_p = 0 \quad (4)$$

を得る。ここでは、2 階の条件は満たされているものとする。(以下同様)

ついで、企業による効用最大化の条件は、(3) を f で微分すると、

$$\frac{\partial S}{\partial f} = \frac{\partial u}{\partial f} - \lambda t_f = 0 \quad (5)$$

を得る。

さらに、効用が最大化される条件は、(4) および (5) から λ を消去して整理すると、

$$\frac{\partial u}{\partial p} / \frac{\partial u}{\partial f} = t_p / t_f \quad (6)$$

が得られる。

特定化された都市の効用関数

都市の外部性が組み込まれた特定化された効用関数は、

$$u(p, f) = \alpha p - \beta p^2 + \gamma f - \varepsilon f^2 \quad (7)$$

で表される。ただし、 α は人口増加による外部経済効果 ($0 < \alpha$)、人口増加による外部不経済効果 ($0 < \beta$)、 γ は企業の外部経済効果 ($0 < \gamma$)、 ε は企業の外部不経済効果 ($0 < \varepsilon$) をそれぞれ示す。

(7) の関数は、都市に対して多くの居住者および多くの企業が増加すると、それらの過度の増加によって外部不経済効果をもたらす性質を有している。

また、人口規模に関する都市の限界効用は、(7) を p で微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \alpha - 2\beta p \quad (8)$$

を得る。さらに、都市の効用が最大化される人口規模（最適人口規模）は（8）をゼロと置くことによって、

$$p^* = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (9)$$

が得られる。

一方、企業規模に関する都市の限界効用は（7）を f で微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial f} = \gamma - 2\varepsilon f \quad (10)$$

を得る。さらに、（10）から都市の効用が最大化される企業規模（最適企業規模）は、（10）をゼロと置くことによって、

$$f^* = \frac{\gamma}{2\varepsilon} \quad (11)$$

が得られる。

ところで、人口規模と企業規模のもとでの効用最大化の条件は（6）、（8）および（10）から、

$$\frac{\alpha - 2\beta p}{\gamma - 2\varepsilon f} = \frac{t_p}{t_f} \quad (12)$$

で示される。さらに、（12）を整理すると、

$$p = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{(2\varepsilon f - \gamma)t_p}{2\beta t_f} \quad (13)$$

が導かれる。（13）から、企業当りの税収としての税金が住民当りの税収としての税金よりもかなり高い場合は、

$$t_p / t_f \rightarrow 0 \quad (14)$$

であることから、(14) を用いて (13) を整理すると

$$p = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (15)$$

を得る。これは、(9) と同じである。したがって、(15) は、(14) から企業当りの税金が高いと、企業規模は落ち着き、外部経済効果において最適人口規模が達成されることを示唆している。

さらに、企業規模の変化に対する人口規模の変化については、(13) を f で微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial f} = \frac{\varepsilon t_p}{\beta t_f} = \frac{\varepsilon / t_f}{\beta / t_p} \quad (16)$$

を得る。(16) から企業の数が増えると、多かれ少なかれ人口は増加するのであれば、その増加の程度は、企業の課税を減らすことによって、企業の立地が人口を増やすことを示唆している。ただし、(14) に従うと、(16) はゼロとなり、変化なしである。

一方、人口が変化に対する企業の変化については (16) とは逆に

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\beta t_f}{\varepsilon t_p} = \frac{\beta / t_p}{\varepsilon / t_f} \quad (17)$$

で示される。(17) については、例えばショッピングセンターの立地に見られる傾向であり、税金で企業の不経済効果が減じられるほど、周辺の環境を優先するショッピングセンターが増えることを示唆している。これは、間接的にも集中的に立地している企業がもたらしめている混雑現象が税金による政策で低下するならば、企業立地が促進されることを示している。

また、住民の税金の変化に対する人口規模の変化は、(13) を t_p で微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial t_p} = \frac{2\varepsilon f - \gamma}{2\beta t_f} = \frac{\varepsilon(f - f^*)}{\beta t_f} \quad (18)$$

が得られる。ただし、(18) の第3項は (11) から導かれている。

(18) から、 $f < f^*$ の場合は、企業の数にもとづく都市の効用が上昇していく場合で、企業に補助金（マイナスの税金、 $t_f < 0$ ）を支出することによって、住民当りの税金を上げても人口は増加することを示している。

一方、 $f^* < f$ の場合は、都市の効用が下降している段階でも、住民の税金を上げても人口は増加することを示している。

さらに、最適な状態に対して (9) および (11) を (12) へ代入して整理すると、

$$\frac{2\beta(\frac{\alpha}{2\beta} - p)}{2\varepsilon(\frac{\gamma}{2\varepsilon} - f)} = \frac{\beta(p^* - p)}{\varepsilon(f^* - f)} = \frac{t_p}{t_f} \quad (19)$$

が得られる。(19) の第2項と第3項から、

$$\frac{(p^* - p)}{(f^* - f)} = \frac{\varepsilon t_p}{\beta t_f} = \frac{\varepsilon / t_f}{\beta / t_p} \quad (20)$$

が得られる。(20) から、都市の効用が上昇段階で、人口規模が最適人口規模に、企業規模が最適企業規模にそれぞれ近づいて行くことは、(14) が満たされると両方の最適規模が近いところで達成される可能性がある。ただし、 ε よりも β がかなり高い場合（逆の場合も同様）は、最悪であるので、それぞれの外部不経済効果を税金で賄う政策で減少させることによって最適な都市に近づける必要がある。

これについては、人口規模または企業規模のどちらかが、最適規模を超えると課税による税収ではなく、補助金を課すことになることを示唆している。

(20) から、住みづらさを減らすことによって最適人口に近づけている都市は活性化された都市が多く、この例として企業よりも住宅が集中している都市であることを示しており、活力のある都市は愛知県の長久手市および日進市など

があげられる⁴。

なお、上記を説明するためには、都市面積を導入することによって、 p を人口密度として、 f を企業密度とすれば、集積の経済と集積の不経済について検討することが可能であった。

ここで実証分析を試みるに際し、(13) から相対的税金比（住民税／企業税）および企業数を変数とすると、人口規模関数は、

$$p = e - hT + kTf \quad (21)$$

に設定される、ただし、 $e = \frac{\alpha}{2\beta}$ 、 $h = \frac{\gamma}{2\beta}$ 、 $k = \frac{\varepsilon}{\beta}$ および $T = \frac{t_p}{t_f}$ である。ちなみに、 e は（9）から、最適人口規模を示している。

(21) の経済学的性格について考察するために、まず (21) を T で微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial T} = -h + kf \quad (22)$$

を得る。(22) については住民税が相対的に増加しても企業数が多いところは住民がより多く増えることを示唆している。

これは、働いている企業の近くに住むことを示唆しているように見える。

また、(21) を f で微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial f} = kT \quad (23)$$

を得る。(23) については企業数が増えると住民の数は相対的に住民税が高い（または法人税が低い）ところほど増える幅は大きいことを示唆している。

さらに、(22) を (23) で除すことによって、

⁴ これについては、週刊ダイヤモンド別冊「伸びる街&地域活力ランキング」2018年、1月14日号、p.49を参照せよ。

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{-h + kf}{kT} \quad (24)$$

を得る。(24) については相対的に企業税を減らすことによる企業数の変化は、企業数が多い都市ほど大きいことを示唆している。

これについては、企業税が低い都市に企業が多い傾向にあることを示している。

3. 実証分析

ここでは、(21) にもとづいて財政指数が1以上の都市とその指数が1以下の都市について回帰分析を試みる。ただし、2015年国勢調査で人口の集計のない福島県双葉郡富岡町、大熊町、浪江町、双葉町及び法人住民税の各区集計の異なる東京23区を除く。

財政力指数1.0以上の自治体のケース (A)

$$p = 88680.84 - 681111.21T + 184.13Tf$$

(6.69) (-7.26) (25.11)

サンプル数：78自治体、相関係数：0.95、決定係数：0.89、() 内は t 値

財政力指数1.0未満の自治体のケース (B)

$$p = -398.02 - 58545.82T + 150.77Tf$$

(-0.17) (-8.7) (150.43)

サンプル数：1,636自治体、相関係数：0.97、決定係数：0.94、() 内は t 値

分析結果の考察

ケース (A) については、関数の適合度が高く、各係数とも有意な結果であった。定数は都市の最適人数を示しており、これは約88681人である。また、 T に対する係数が681111.21とかなり大きいことから相対的に企業の外部経済効果が高いことを示唆している。さらに、 Tf に対する係数が184.13であることから、住民

の外部不経済効果よりも企業の外部不経済効果の方が比較的高いと言える。(22)から、住民税を上げて住民が増えるのは企業数が3700以上なければならない。

ケース (B) については、関数の適合度が高く、定数を除くと有意な結果であった。ケース (A) 同様に、 T に対する係数が58545.82で比較的大きな値を示している。また、 Tf に対する係数が150.77である。(22) から、住民税を上げて住民が増えるのは企業数が389以上なければならない。定数が負であることは人口や企業数に大きな差があることからきており、人口を人口密度、企業数を企業密度にそれぞれ置き代えて推計してみる必要がある。

総合的考察

上記のケース (A) およびケース (B) から財政力のある都市については、それがない都市よりも税金の比率に敏感であり、若干であるが税金の比率と企業数との相乗効果は高い。また、財政力の高い都市の最適人口が約9万人であることは興味深い結果である。さらに、住民税を増やしても住民数が増えるのは財政力のある都市では企業数が3700以上である。一方、財政力のない都市では企業数が389以上であり、この差はかなり大きいと考察される。

4. おわりに

本研究では、まず都市財政の制約のもとでの都市効用モデルを構築した。その際、住民税と企業税の使い方によって、都市の効用が最大化される条件について分析を行った。さらに、このモデルの実証分析を可能にするために、都市において避けることができない外部性を導入することによって、人口規模を被説明変数とするモデルを構築した。そこでは、企業の外部経済効果において2乗以外の指数を用いて分析することも可能であったが、テラー展開を用いると税の比率が限りなくゼロに近いという仮定をおかなくてはならないこと、住民および企業の外部経済効果の指数部分は所与としないと回帰分析が行えないこと等の問題が含まれていた。そのため、ここでは各外部不経済効果に対して2

乗することによって、回帰分析が可能な都市の人口規模関数を設定した。その関数を応用して、財政力指数が1以上と1未満のグループに分けて実証分析を試みた。その結果、とりわけ財政力の高い都市の最適人口が導かれたこと、財政力の高低に関わらず、住民税を上げても企業数によっては住民が増えることなどが考察された。

今後は、ここでの分析結果を踏まえて都市政策との関連性について検討すること、さらに、空間の制約を取り入れることで、例えば、人口密度および企業密度を導入することで、集積の経済効果および集積の不経済効果を踏まえた都市規模の一般モデルを構築することが課題として残される。

参考文献

- Atkinson, A. B. and J. E. Stiglitz (1980) *Lectures on Public Economics*, New York: McGraw-Hills.
- Stiglitz, J. E. (1977) 'The Theory of Local Public Goods', in *The Economics of Public Services*, edited by A. J. Feldstein and R. P. Inman, The Macmillan Press.
- Stiglitz, J. E. (2000) *Economics of the Public Sectors*, Third Edition, W. W. Norton & Company (邦訳-藪内史郎『公共経済学(上)(下)』東洋経済新報社、2003年、2004年)
- Rubinfeld, D. L. (1987) 'The Economics of the Local Public Sector', in *Handbook of Public Economics*, vol. II, edited by A. J. Auerbach and M. S. Feldstein, North-Holland.
- 宇沢弘文・小川善弘「地方公共財理論における Atkinson-Stiglitz のパラドックスについて」『経済学論集』東京大学大学院経済学研究科、54巻4号：pp.2-10、1989年
- 神頭広好「観光都市の規模と性格—地方公共財の理論に基づいて—」『日本観光学会誌』第47号、2006年
- 坂下 昇「第7章 地方公共財の地域間最適配分」(宇沢弘文・茂木愛一郎編『社会的共通資本—コモンズと都市』東京大学出版会、1994年)

第3章 観光における外部性の転換点と観光最適密度 —政令指定都市を対象とした実証分析—

野 呂 純 一

要 約

本研究では、野呂・神頭（2020）の理論的枠組みを発展させ、政令指定都市を対象に観光における外部性を実証的に検討した。その中で、2019年および2022年のクロスセクションデータを用いて、観光密度を説明変数、観光入込客数を被説明変数とする二次回帰分析を行った結果、両年ともモデル全体として統計的に有意であり、観光密度と観光入込客数の間に上に凸の放物線の関係が示された。これは、観光における外部経済効果と外部不経済効果が同時に作用し、一定の密度を超えると外部不経済効果が優勢となる構造を意味する。また、理論上導出される「観光最適密度」は、2019年の13.94万人/㎢から2022年には9.28万人/㎢へと低下しており、COVID-19によるパンデミック前後の観光構造変化を数量的に把握する手がかりとなった。さらに、観光密度と観光最適密度との乖離に基づく都市類型化により、地域間比較の枠組みを提示した。

キーワード：外部経済効果、外部不経済効果、観光密度、観光最適密度、
COVID-19

1. はじめに

「都市」をめぐる研究は、地理学、都市経済学、空間経済学など、複数の学問領域において横断的に発展してきた。例えば、地理学の分野では、都市間の魅力度や相互作用の強度が重力モデルや空間相互作用モデルを用いて定量的に

分析されており、都市経済学の分野では、Thünen (1826) による農業立地モデル、Weber (1909) による工業立地モデル、Lösch (1962) による都市モデル、Alonso (1964) による住宅立地モデルなど¹⁾を基盤として、都市の立地構造を理論的に説明しようとする試みが重ねられてきた。

「集積」に関する研究については、Weber (1909)、Hoover (1937)、Isard (1956) らが、工業や商業の分野における集積効果を立地論の観点から論じている²⁾。

さらに、「集積の経済」に関する研究に目を向けると、地理学・都市経済学・国際経済学を統合する新経済地理学や空間経済学の登場によって、研究対象がグローバルな視野へと拡大し、新たな理論的方向性が提示されているものの、「観光」を対象とした集積の経済やその効果に関する理論的・実証的研究は、依然として限られている。

こうした背景のもと、野呂・神頭 (2020) は、「観光における外部性」すなわち観光客の増加による都市の活性化という外部経済効果³⁾と、観光客の過度の集中がもたらす混雑に代表され、近年、国際的に問題視されているオーバートゥリズムなどをはじめとする外部不経済効果⁴⁾の双方に着目しながら、大都市における観光客の集積度を観光密度（都市の観光入込客数を都市面積で除した値、単位：万人 / km²）として捉え、外部経済効果と外部不経済効果が同時に存在する場合の「観光における都市の成長モデル」を構築し、政令指定都市における観光入込客数データを用いた実証分析を実施した。

同研究では、以下の3つの仮定を踏まえて、都市の観光成長モデルを式（1）

¹⁾ これらのモデルについては、McCann (2001) および神頭 (2009) を参照されたい。

²⁾ 西岡 (1993) により、これらの研究の多くが整理されている。

³⁾ ここでいう外部経済効果とは、観光客の増加が市場取引を介さずに取引当事者以外の経済主体にもたらす便益を指す。具体例として、公共サービスの充実、交通手段の利便性、宿泊施設の拡充などが挙げられる。

⁴⁾ ここでいう外部不経済効果とは、観光客の過度の集中が市場取引を介さずに取引当事者以外の経済主体にもたらす損失を指す。具体的には、交通渋滞、廃棄物の増加、治安の悪化などが挙げられる。

のように示している。

- (1) 当該都市には観光資源とビジネスが集中しており、短期において都市面積は変化しない。
- (2) 当該都市における観光の発展を表す観光客の増加は、観光集積としての観光密度に依存している。
- (3) 観光による都市の成長は、観光密度に関して外部経済効果と外部不経済効果の2つの効果が生じることによって影響される。

$$\Delta P_t = a \frac{P_t}{L} - b \frac{P_t}{L} \quad (1)$$

ここで、都市における観光入込客数における変化を ΔP_t 、 t 期の都市の観光入込客数を P_t 、 L は都市面積、 a は外部経済効果、 b は外部不経済効果をそれぞれ示している。

この式は、観光密度が高まることで外部経済効果が増加する一方、外部不経済効果も同時に拡大するという構造を捉えており、それらの差し引きの効果として ΔP_t が得られる。

さらに、外部経済効果と外部不経済効果の差分 ($a-b$) を都市面積 L で割った純外部経済効果を ε と定義すると、式 (2) が得られる。この ε を実証的に推計するために、式 (3) では、対数線形で表現されている⁵⁾。

$$\varepsilon = \frac{a}{L} - \frac{b}{L} \quad (2)$$

$$\log P_t = \log P_0 + \varepsilon t \quad (3)$$

ここで、 ε の値は次のように解釈できる。

- (a) $0 < \varepsilon$ あれば、都市面積当たりの外部経済効果が外部不経済効果よりも相対的に大きい。
- (b) $0 = \varepsilon$ であれば、都市面積当たりの外部経済効果と外部不経済効果が等しいか、両効果ともに存在しない。

⁵⁾ 式 (1) から式 (3) への導出過程については野呂・神頭 (2020) を参照されたい。

- (c) $0 > \varepsilon$ であれば、都市面積当たりの外部不経済効果が外部経済効果よりも相対的に大きい。

これらを踏まえて、野呂・神頭（2020）では、2010年から2018年までの9年間にわたる政令指定都市⁶⁾における観光入込客数データを用いた時系列分析により、「観光における外部性」について単一都市内の経年変化を明らかにした。

これに対して、その延長上に位置づけられる本研究では、表1における比較が示すように、野呂・神頭（2020）の理論枠組みを継承しつつ、2019年および2022年のクロスセクションデータに基づいて、観光密度と外部経済効果および外部不経済効果の関係を二次回帰モデルによって分析する。さらに、理論上の観光最適密度（観光密度に基づき、外部経済効果と外部不経済効果が均衡する推計上の水準）を指標として導出し、それに基づいて都市を類型化・比較することにより、COVID-19前後における観光構造の変化を、観光密度と外部性の関係に着目して定量的に検討することを目的とする。

表1 野呂・神頭（2020）と本研究との比較

	野呂・神頭（2020）	本研究
分析手法	時系列分析	クロスセクション分析
都市面積	理論的仮定	実際の都市面積
分析の視点	単一都市の経年変化	都市間比較

本研究の構成は以下の通りである。次に、本研究の理論的枠組みと分析手法を示す。続いて、二次回帰モデルによる推定結果を提示し、観光最適密度を算出する。その後、観光最適密度に基づいて都市の類型化を行い、COVID-19前後における変化を分析する。最後に、研究の成果と限界を整理し、今後の課題を提示する。

⁶⁾ 政令指定都市とは、地方自治法第252条の19 による政令によって指定された人口50万人以上の都市（地理用語研究会編『地理用語集』山川出版社、2014年、p.177）を指す。

2. 理論的枠組みと分析方法

本研究では、政令指定都市20市のうち、大阪市および堺市を除いた18市⁷⁾を対象とした。これらは、公益財団法人日本観光振興協会『数字で見る観光』2024年度版に掲載されている都市である。

その中で、観光入込客数には、2019年および2022年⁸⁾のデータを使用し、都市面積については、国土交通省国土地理院の「全国都道府県市区町村別面積調」に公表されている、令和元年（2019年）および令和4年（2022年）10月1日時点⁹⁾の数値を採用し、各都市の「市区町村面積」を用いた。

これにより、表2に示されるように、観光入込客数（万人）と都市面積（km²）のデータから、各都市の観光入込客数（万人）を都市面積（km²）で除した値（万人/km²）である観光密度を算出した。さらに、後の二次回帰分析に用いるため、観光密度の二乗値も併せて算出した。

表2 政令指定都市の観光入込客数・都市面積・観光密度（2019年・2022年）

市	2019年			
	観光入込客数 (万人)	都市面積 (km ²)	観光密度 (万人/km ²)	観光密度の二乗
札幌市	1526	1121.26	1.36	1.85
仙台市	2181	786.35	2.77	7.69

⁷⁾ 大阪市および堺市については、観光入込客数のデータが公表されていないため、分析対象から除外した。

⁸⁾ COVID-19の本格的な影響が生じる前の2019年と観光指標が回復傾向を示した2022年のデータを用いて比較分析を行った。なお、より完全な回復状況を把握するため2023年度との比較も検討したが、2023年度の18市のデータが現時点で入手困難なため、入手可能な最新データである2022年を分析対象年とした。

⁹⁾ 国土交通省国土地理院「全国都道府県市区町村別面積調」（平成26年以降）では、各年の1月1日、4月1日、7月1日、および10月1日時点の国土面積が掲載されている。このうち、全年次において共通して利用可能なものは、10月1日時点のデータのみである。従って、今後の分析や本研究の延長としての継続的な比較研究においても、時系列的な整合性を確保するため、共通の基準として10月1日時点の面積データを使用することとした。

さいたま市	2561	217.43	11.78	138.73
千葉市	2595	271.78	9.55	91.17
横浜市	5582	437.70	12.75	162.64
川崎市	2016	143.01	14.10	198.72
相模原市	1164	328.91	3.54	12.52
新潟市	1865	726.46	2.57	6.59
静岡市	2363	1411.83	1.67	2.80
浜松市	1944	1558.06	1.25	1.56
名古屋市	4999	326.50	15.31	234.42
京都市	5352	827.83	6.47	41.80
神戸市	3542	557.01	6.36	40.44
岡山市	758	789.95	0.96	0.92
広島市	1427	906.68	1.57	2.48
福岡市	2148	343.46	6.25	39.11
北九州市	2421	491.69	4.92	24.24
熊本市	601	390.32	1.54	2.37
2022年				
項目 市	観光入込客数 (万人)	都市面積 (km ²)	観光密度 (万人 / km ²)	観光密度の二乗
札幌市	1311	1121.26	1.17	1.37
仙台市	1922	786.35	2.44	5.97
さいたま市	2113	217.43	9.72	94.44
千葉市	1798	271.76	6.62	43.77
横浜市	4235	438.01	9.67	93.48
川崎市	1508	142.96	10.55	111.27
相模原市	632	328.91	1.92	3.69
新潟市	1341	726.28	1.85	3.41
静岡市	1966	1411.93	1.39	1.94
浜松市	1445	1558.06	0.93	0.86
名古屋市	3719	326.50	11.39	129.74
京都市	4361	827.83	5.27	27.75
神戸市	2161	557.03	3.88	15.05
岡山市	509	789.95	0.64	0.42
広島市	925	906.69	1.02	1.04
福岡市	1860	343.47	5.42	29.33

北九州市	1785	492.5	3.62	13.14
熊本市	405	390.32	1.04	1.08

次に、観光密度 (D) およびその二乗項 (D^2) を説明変数とし、観光入込客数 (P) を被説明変数とした以下の式 (4) に示されるような二次回帰モデルの係数を推定した¹⁰⁾。

$$P_t = \alpha + \beta_1 D_t + \beta_2 D_t^2 \quad (4)$$

ここで、 P_t は t 年における都市の観光入込客数を、 D_t は t 年における観光密度をそれぞれ示している。このとき、 $\beta_2 < 0$ であれば、回帰曲線は上に凸の放物線となり、観光密度が一定の水準を超えると外部不経済効果が外部経済効果を上回る構造を意味する。この転換点、すなわち、外部経済効果と外部不経済効果が打ち消し合う観光最適密度 D_t^* は、次の式 (5) のように表される¹¹⁾。

$$D_t^* = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} \quad (5)$$

以上で示した理論的枠組みに基づき、次章では、政令指定都市18市の観光密度と観光入込客数に関する二次回帰分析を通じて、観光最適密度の実証的検証を行う。

¹⁰⁾ 本研究では、説明変数と被説明変数の双方に観光入込客数が含まれる構造的関係を持つ。しかし、ここでは観光密度を都市面積による規格化指標として扱い、単なる算術的關係ではなく集積度を表す概念的指標として位置づける。この分析の目的は、厳密な因果推定ではなく、外部性の転換点（観光最適密度）を概念的に数量化することにある。

¹¹⁾ 観光最適密度は、観光密度の増加による観光入込客数の限界効果がゼロとなる点として定義される。この点では外部経済効果と外部不経済効果が均衡し、それ以降は外部不経済効果が優勢となる転換点でもある。したがって、式 (4) を D_t で一階微分し、その結果をゼロとおくと、 $\frac{\partial P_t}{\partial D_t} = \beta_1 + 2\beta_2 D_t = 0$ から $D_t^* = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$ が導出される。

3. 二次回帰モデルによる推定結果

ここでは、まず、前節で構築した二次回帰モデルの推定結果について述べると、推定された回帰式は以下の式（6）、式（7）の通りであり、詳細な結果を表3にまとめた。

$$2019年: P_{2019} = 859.90 + 431.62D - 15.48D^2 \quad (R^2 = 0.46) \quad (6)$$

$$2022年: P_{2022} = 519.08 + 520.24D - 28.05D^2 \quad (R^2 = 0.47) \quad (7)$$

ただし、 D ：観光密度（万人/km²）、 P_t ： t 年における観光入込客数（万人）、 R^2 は決定係数をそれぞれ示している。

表3 二次回帰モデルによる推計結果

年	2019年		2022年	
変数	係数	t 値	係数	t 値
定数項 (α)	859.90	1.28	519.08	1.00
観光密度 (β_1)	431.62	1.73	520.24*	1.97
観光密度 ² (β_2)	-15.48	-0.97	-28.05	-1.25
R^2	0.46		0.47	
F 統計量	6.29**		6.59***	
観測数	18		18	

注：*** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$ （t 値に基づく係数の有意性を示す）

観光密度と観光入込客数の関係を分析するため二次回帰を行った結果、2019年のモデル全体は $F = 6.29$ （ $p = 0.01$ ）で統計的に有意であったが、一次項の係数は $t = 1.73$ （ $p = 0.10$ ）で10%水準に近いものの有意には至らず、二次項の係数も $t = -0.97$ （ $p = 0.35$ ）で有意性は確認されなかった。

2022年のモデル全体について見ると、 $F = 6.59$ （ $p < 0.01$ ）で統計的に有意であ

り、一次項の係数は $t=1.97$ ($p=0.07$) で10%水準の有意性を示した。二次項の係数は有意ではないが ($t=-1.25$, $p=0.23$)、符号は理論的予測と一致しており、モデル構造の妥当性は一定程度支持される。

なお、本分析では説明変数として D と D^2 を同時投入しており、両変数の相関係数は両年とも0.97と高い。VIFについても2019年で18.78、2022年で20.25となり、多重共線性の影響が確認された。これにより標準誤差が拡大している可能性があるが、本研究の主目的である観光最適密度 D^* の算出には影響しない。また、サンプルサイズが18という制約から、個別係数の統計的有意性には限界があるが、両年ともモデル全体の有意性が確認され、かつ二次項の符号が理論的予測と一致していることから、観光密度と外部性との関係を探る分析方法の一つとして、一定の示唆を与え得る。

ここで、外部経済効果と外部不経済効果の転換点である観光最適密度を式(5)により算出すると、2019年の観光最適密度は13.94万人/ km²、2022年は9.28万人/ km²となっている。2019年と2022年を比較すると観光最適密度の変化は、-4.66万人/ km²であることが確認できる。

4. 観光最適密度に基づく都市の類型化

ここでは、表2に示される政令指定都市18市における観光入込客数を縦軸に、観光密度を横軸にとり、2019年における観光密度と観光入込客数の関係を図1に、2022年における観光密度と観光入込客数の関係を図2として、各都市の位置を散布図に示した。また、外部経済効果と外部不経済効果の転換点である観光最適密度を縦の点線で示した。

図1を見ると、回帰曲線は上に凸の放物線を描いており、観光密度が一定水準(13.94万人/ km²)を超えると、観光入込客数の増加は頭打ちとなり、次第に減少へと転じる傾向が確認できる。この中で、観光最適密度を示す点線よりも右側には名古屋市、川崎市が位置し、これらの都市は外部不経済効果が相対的に優勢な領域にあると考えられる。

一方、観光最適密度の左側には横浜市やさいたま市をはじめ、残りの都市が

観光入込客数（万人）

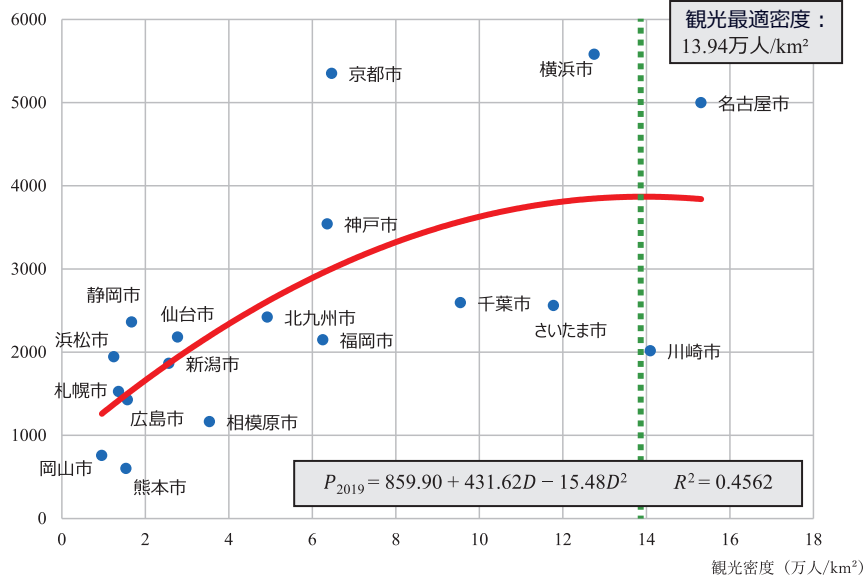


図1 観光密度と観光入込客数の関係（2019年）

観光入込客数（万人）

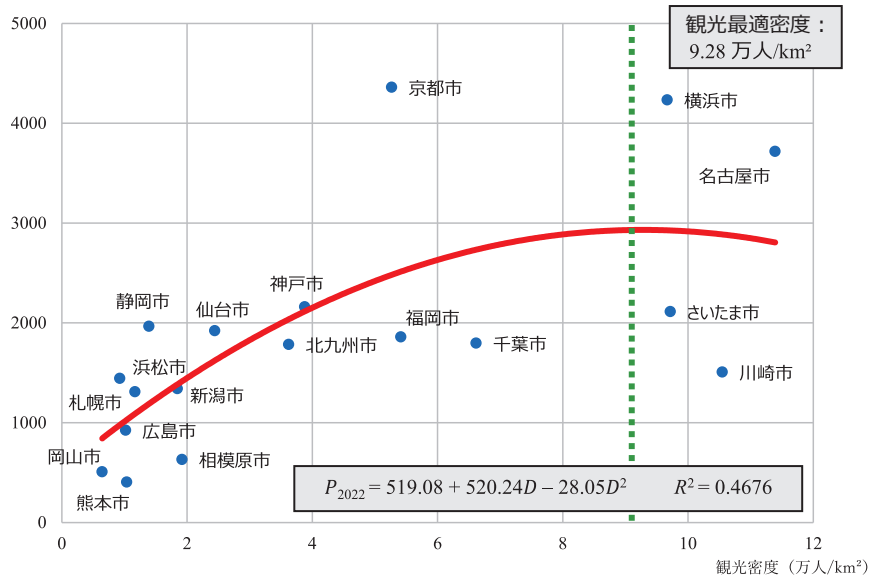


図2 観光密度と観光入込客数の関係（2022年）

位置しており、外部経済効果が働く段階にあると言える。さらに、観光最適密度を大きく下回る左端には、札幌市、浜松市、静岡市など、面積の大きな地方中核都市が分布していることがわかる。

図2では、観光最適密度が9.28万人/km²に低下し、点線の位置が左にシフトしたことにより、さいたま市、横浜市が観光最適密度を超えて右側に位置することとなった。これは、これらの都市が外部不経済効果が優勢な領域に移行したことを意味しており、さらに回帰曲線の頂点が2019年より低い密度で現れていることから、COVID-19によるパンデミック後の構造変化が明確に反映されている。

また、本研究では、統計的な不確実性を考慮し、観光最適密度の±15%の範囲を「実質的な最適領域」として設定した。この±15%という範囲は、統計的推定の不確実性を踏まえ、厳密な最適点からの適度な乖離を許容する実用的な基準として本研究で独自に設定したものである。これは一つの試行的枠組みであり、今後の研究において他の閾値設定との比較検討が求められる。

この基準に基づき、観光密度 D が「 $0.85D^* \leq D \leq 1.15D^*$ 」を満たす場合、観光最適密度の近傍、すなわち、実質的な最適領域にあるものと解釈し、以下の3段階で都市を類型化した。

- ① 低密度都市：観光密度 < 観光最適密度 × 0.85
- ② 最適密度都市：観光最適密度 × 0.85 ≤ 観光密度 ≤ 観光最適密度 × 1.15
- ③ 高密度都市：観光密度 > 観光最適密度 × 1.15

2019年における都市を類型化した結果、観光最適密度13.94万人/km²を基準とし、観光最適密度の±15%で区切ると、低密度都市が15都市、最適密度都市が3都市（名古屋市、川崎市、横浜市）、高密度都市に該当する都市は見られなかった。

また、2022年について、観光最適密度9.28万人/km²の±15%に基づいて類型化すると、低密度都市が14都市、最適密度都市が3都市（川崎市、さいたま市、横浜市）、高密度都市が1都市（名古屋市）となった。

2022年では、2019年と比較して名古屋市が最適密度都市から高密度都市へ

と移行し、さいたま市が低密度都市から最適密度都市へと移行した。その他の都市は2019年と同様の類型にとどまった。このように、観光最適密度がCOVID-19を契機として大きく低下していることは、密集回避行動の定着や過密状況に対する社会的許容度の変化が、外部不経済効果を誘発しやすい密度水準を相対的に引き下げた可能性を示唆している。

名古屋市が2019年の最適密度都市から2022年の高密度都市へ移行したことも踏まえると、各類型の政策方向は以下のとおりである。低密度都市（札幌市、浜松市、静岡市等）については、観光インフラの整備、アクセス向上、プロモーション強化による観光客誘致策の推進が重要である。最適密度都市（川崎市、さいたま市、横浜市）については、現在の水準を維持しつつ、観光の質的向上、持続可能性の確保、地域住民との共生に焦点を当てるべきであろう。高密度都市となった名古屋市については、観光流動の時間的・空間的分散、混雑緩和策、代替観光地の開発等による負荷軽減が求められる。

5. おわりに

本研究は、野呂・神頭（2020）の理論的枠組みを発展させ、観光における外部性の構造を理論と実証の両面から明らかにすることを目的とし、政令指定都市を対象に、観光密度と観光入込客数の関係を二次回帰モデルにより分析した。

その結果、両者の関係は上に凸の放物線として捉えられ、外部経済効果と外部不経済効果の転換点である観光最適密度の存在が、統計的に示唆された。観光最適密度は2019年に13.94万人/km²、2022年に9.28万人/km²と大きく変化しており、これはCOVID-19を契機とした都市観光構造の変容を反映していると考えられる。また、観光最適密度に基づいて、都市を類型化することを通じて、名古屋市のように密度水準の変化が都市の観光負荷構造に及ぼす影響を定量的に把握することができた。

これは、観光密度と観光入込客数の非線形関係に基づいて、観光における外部性の転換点を定量的に把握する試みであり、あわせて、観光最適密度という概念に基づく都市類型化の枠組みを検討することにより、観光経済学と都市経

経済学の交差領域における分析に対し、一つの視角を提供することを目指したものである。

その中で、以下の3点をはじめとした、いくつかの限界が存在するのもまた事実である。

- (1) 方法論的な制約として、サンプル数が政令指定都市18市に限定されていることから、推定された係数の統計的有意性には限界がある。特に二次回帰分析では自由度の観点から推定の安定性に課題が残る。また、大阪市・堺市の除外により、大都市圏の包括的な把握には限界がある。
- (2) データ的な制約として、クロスセクション分析に基づいていることから、観光密度の時系列的な変化や都市固有の要因の影響を十分に捉えることができない。
- (3) 指標上の制約として、観光密度が都市全体の面積を分母とする平均的な指標であるため、観光客の空間的な集中度が適切に反映されない側面がある。特に京都市や福岡市のように、観光入込客数が多く、都市面積が広大な都市では、観光密度が過小に評価される傾向があるため、この指標の解釈には注意を要する。

以上の限界を踏まえ、今後の課題としては、まず方法論の拡張が挙げられる。この点において、より多くの都市を対象とした分析や、複数年にわたるパネルデータの活用により、推定の安定性を高めるとともに、観光密度の時系列的変化を動態的に把握することが可能となる。それに加えて、政令指定都市にとどまらず、中核市や特例市を含む広範な都市群を分析対象とすることで、都市階層に応じた観光構造の違いを明らかにするための包括的な視座が得られよう。

次に、指標面での改善も重要である。観光密度に加えて、観光施設密度や宿泊施設の稼働率といった補完的指標の導入や、主要観光地区に限定した局所的密度の算出を通じて、空間分析の精度を高める必要がある。とりわけ、観光客の集中が局所的に発生する都市においては、都市全体を平均化した指標のみでは実態を十分に把握できない可能性がある。

さらに、文化観光、自然観光、イベント観光といった観光形態に応じた類型

的分析を進めるとともに、国外都市との比較を通じた国際的な一般化の試みも、理論的および実証的な発展に資するものと考えられる。今後は、こうした多面的なアプローチを通じて、観光における外部性と都市構造の関係をより精緻に理解していくことが期待される。

最後に、本稿で提示した分析が今後の関連研究の深化や、観光政策の実践的な立案に資する一助となることを期待する。

参考文献

- Alonso, W. (1964) *Location and Land Use*, Harvard University Press.
- Fujita, M. and J. F. Thisse (2013) *Economics of Agglomeration*, Second Edition, Cambridge University Press (邦訳－徳永澄憲・大田充『集積の経済学』東洋経済新報社、2017年)
- Hoover, E. M. (1937) *Location Theory and the Shoe and Leather Industries*, Harvard University Press (邦訳－西岡久雄『経済立地論』大明堂、1968年)
- Isard, W. (1956) *Location and Space-Economy*, The MIT Press (監訳－木内信蔵『立地と空間経済』朝倉書店、1964年)
- Krugman, P. (1996) *Development, Geography, and Economic Theory*, The MIT Press. (邦訳－高中公男『経済発展と産業立地の理論』文真堂、1999年)
- Lösch, A. (1962) *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer Verlag, Stuttgart (邦訳－篠原泰三『レッシュ経済立地論』大明堂、1991年)
- McCann, P. (2001) *Urban and Regional Economics*, Oxford University Press (邦訳－黒田達明・徳永澄憲・中村良平『都市・地域の経済学』日本評論社、2008年)
- Thünen, J. H. (1826) *Der isolierte Staat, in Beziehung auf Landwirtschaft and Nationalökonomie* 邦訳－近藤康男『孤立国』農村漁村文化協会、1974年)
- Weber, A. (1909) *Über den Standort der Industrien, Erste Teil*, Tubingen (邦訳－篠原泰三『工業立地論』大明堂、1986年)
- 神頭広好 (2009) 『都市の空間経済立地論－立地モデルの理論と応用－』古今書院
- 公益社団法人日本観光振興協会編 (2025) 『数字で見る観光』2024年度版
- 国土交通省国土地理院「令和元年全国都道府県市区町村別面積調 (10月1日時点)」国土地理院技術資料 E2-No.67
- 国土交通省国土地理院「令和3年全国都道府県市区町村別面積調 (10月1日時点)」国土地理院技術資料 E2-No.74
- 西岡久雄 (1993) 『立地論』大明堂、増補版

地理用語研究会編（2014）『地理用語集』山川出版社

野呂純一・神頭広好（2020）「大都市における観光の外部性－観光における都市の成長モデルの構築と実証分析－」『経営総合科学』第113号、愛知大学経営総合科学研究所、1-13頁

第4章 全ての地図は四色あれば塗り分けられる

神 頭 広 好

1. はじめに

四色問題については、1852年に兄の F. Guthrie によって提案されてから、トポロジーの理論、組み合わせの理論、オイラーの公式にもとづくグラフ理論¹を応用した研究が多く見られる²。近年、これらの研究とは別に、コンピューターによって Appel and Haken (1977) が四色問題を解いたとされている³。これで、四色問題は四色定理となったものの、エレガントな解という点では今でも賛否両論ある。この問題もしくは定理については、kozu (2022) および神頭 (2023) によって自称ペイント理論⁴において説明されている。

今回は、神頭 (2024 (B)) に沿って、まず3本のペイントの3色から成る1つの色（混合色）を作り、さらに3本のうち2本のペイントによる組み合わせから異なる3つの色を作る。これで計4色を作ることができる。ついで、これら4色のうち2色を使って、地図上の2つの隣接する領域に色を塗り分け、こ

¹ これは、NHK 制作班 (2023、テーマ3) において、頂点と面を入れ替えた双対グラフで四色問題が解かれることが指摘されている。ただし、すべて双対グラフにおいて分割された図形は三角形であることが前提となる。(一松 (2016年、第1章) を参照) ちなみに Benjamin, A. Chartrand, A. and P. Zhang (2015) によって、四色問題をグラフ理論の中で分り易く説明されている。

² これについては、Ore (1967)、Saaty and Kainen (1977)、Willson (2002)、一松 (2016) によって説明されている。

³ これについては、Appel and Haken (1977)、竹内 (1976)、Willson (2002)、一松 (2016) を参照せよ。

⁴ この理論の基本については、神頭 (2024、pp.259-266) および神頭 (2024) を参照せよ。

れら2つの領域と同時に隣接する空白領域に異なる3つ目の色を塗る。これを繰り返すことによって四色あれば地図が塗り分けられることを示す。ただし、コンピューターによる証明と同様に、これだけでは証明が弱いために、総領域数に用いられた3つのペイントから4色あれば5色も必要がないことを明らかにする。さらに偶数および奇数の循環領域数による色の組み合わせからも四色問題が解決されることを示す。

2. 全ての地図は四色で塗り分けられる

四色問題を解くに当たり、以下の諸仮定が設定される。

- (1) 異なる3つの色 x , y , z を有するペイントを用いて、その3つのペイントによって混合された色⁵ xyz とその3つのうち2つのペイントによって混合された3つの色 xy , xz , yz から成る計4色が使用される。したがって、ここでは塗り分けに使用されるペイントの色 x , y , z は除外される。これにもとづいて2つの色または3つの色の組み合わせから他の異なる色を求めるための変換式が構築される。(付録参照)
- (2) 地図上において、2つの異なる色が塗られた隣接する領域に同時に接する空白領域に塗られる色は、(1) で構築された変換式を通じて求められる。(例として図1参照)
- (3) どんな色であっても同色に同色を何回重ねても同色である。また、同色が塗られた数は同色の領域数でもある。なお、色が重ねられた段階では色の組み合わせは成立しない。

⁵ ここでは、混合された色は積の形で表される。これについては、神頭 (2023, pp.13-19)、神頭 (2024 (A) および (B)) を参照せよ。

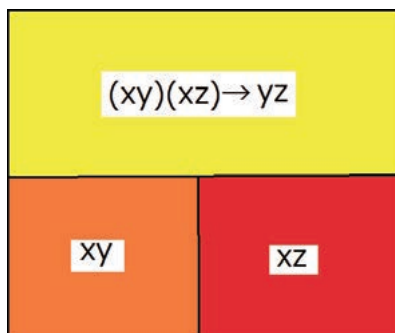


図 1

上記の仮定から、4つの色を用いて、異なる色を有する2つの隣接領域に同時に接している空白領域の色は、以下の手続きによって設定される。

- ・色 xy 、色 xz 、色 yz を有する3つの領域と同時に接する空白領域の色は、以下の変換式によって求められる。

$$(xy)(xz)(yz) \rightarrow (xyz)^2 \rightarrow xyz \quad (1)$$

(1) から、色 xy 、色 xz 、色 yz それぞれを有する隣接する3つの領域に同時に接する空白領域の色は xyz である。

- ・色 xz と色 xy を有する2つの領域が何回も交互に接している場合の空白領域の色は、以下の変換式によって求められる。

$$(xy)^n (xz)^m \rightarrow (xy)(xz) \rightarrow x^2(yz) \rightarrow yz \quad (2)$$

(2) の第2項と第4項から、色 xy および色 xz を有する2つの隣接領域に同時に接する空白領域の色は yz である。

- ・色 xz と色 yz を有する2つの領域が何回も交互に接している場合の空白領域の色は、以下の変換式によって求められる。

$$(xz)^n (yz)^m \rightarrow (xz)(yz) \rightarrow z^2(xy) \rightarrow xy \quad (3)$$

(3)の第2項と第4項から、色 xz および色 yz を有する2つの隣接領域に同時に接する空白領域の色は xy である。

- ・色 xy と色 yz を有する2つの領域が何回も交互に接している場合の空白領域の色は、以下の変換式によって求められる。

$$(xy)^n (yz)^m \rightarrow (xy) (yz) \rightarrow y^2 (xz) \rightarrow xz \quad (4)$$

(4)の第2項と第4項から、色 xy および色 yz を有する隣接領域と同時に接する空白領域の色は xz である。ただし、(2)から(4)において自然数である n および m は、色 xy および色 yz の領域数を示している。

ちなみに、図2は3つの色で塗り分けられるケースが描かれている。同図については、 $(xy)^3 (xz)^2 \rightarrow (xy) (xz) \rightarrow yz$ の例が示めされている。

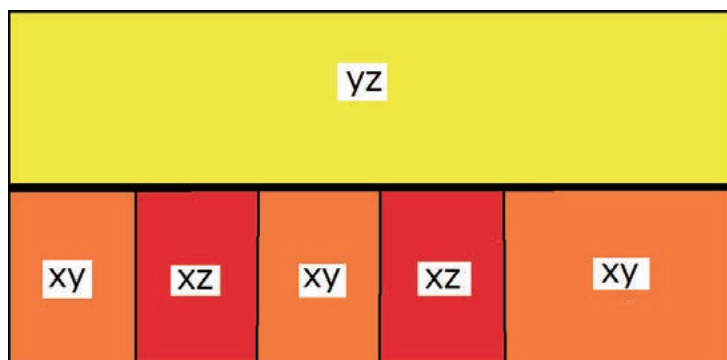


図2

注) 上図における水平の太黒線の上の領域に黄色 yz が塗られることを示唆している。

- ・色 xy 、色 xz 、色 yz のそれぞれが塗られた3つの領域のどれかと色 xyz の領域が接している場合の空白領域の色は、以下の変換式によって求められる。

$$(xy) (xyz) \rightarrow x (xy) (yz) \rightarrow (xy) (yz) \rightarrow y^2 (xz) \rightarrow xz \quad (5)$$

(5)の第1項、第3項、第5項から、 xy と xyz 、 xy と yz のどちらかの色の組み合わせを有する隣接領域とそれと同時に接する空白領域の色は共に xz である。

さらに、(5)については、もう1つの以下の変換式が導かれる。

$$(xy) (xyz) \rightarrow y(xy) (xz) \rightarrow (xy) (xz) \rightarrow x^2(yz) \rightarrow yz \quad (6)$$

(6)の第1項、第3項、第5項から、色 xy と色 xyz 、色 xy と色 xz のどちらかの色の組み合わせを有する隣接領域とそれと同時に接する空白領域の色は共に色 yz である。(図3 参照)

ここでは、色 xyz は色 xz 、色 xy 、色 yz の3つの色を混合して作られていることから、色 xyz との組み合わせで作られる色は、3つの色の中で使われない色のどちらかとなる。(図3 参照)

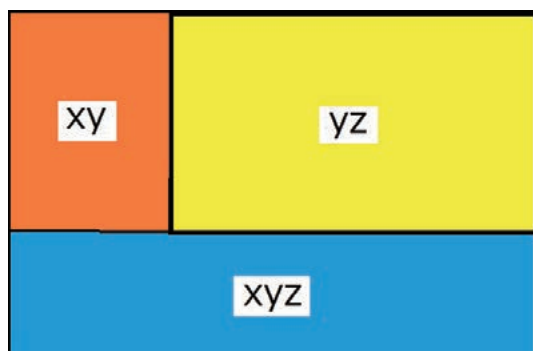


図3

注) 上図における2つの太黒線に同時に接する右上方の領域には、黄色 yz が塗られることを示している。

さらに、隣接している異なる2つの色 xy と色 xz の領域のどちらかに色 xyz の領域が隣接していてもこれら3色すべての領域に接する空白領域には他の1つの色 yz があてられる。この例は、図4で示される。ただし、以下の変換式

$$(xy) (xyz) \rightarrow (xy)^2 z \rightarrow (xy)^2 \rightarrow xy \quad (7)$$

は、第1項と第4項から同色の領域は接することができないために除外される。

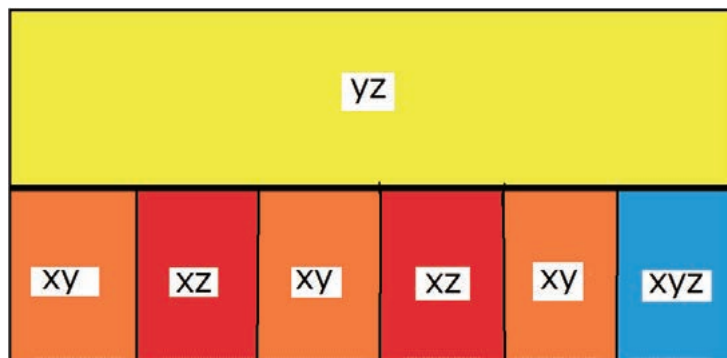


図 4

注) 上図における太黒の水平線の上の領域は、空白の領域に黄色 yz が塗られることを示している。

実際に地図の塗り分け方として、まず図 5 (左) が示すように 2 つの隣接領域に異なる色 xy および色 xz を塗り、それら 2 つと異なる色 yz を隣接している空白領域に塗る。さらに、それを繰り返すことによって空白領域の色を塗り分けていくと 3 色で塗り分けられることができる場合がある。しかし、異なる 3 つの色を有する領域と同時に接する場合はもう 1 つの異なる色が必要となる。そのために図 5 (右) が示すように少なくとも 4 色あれば地図は塗り分けられる。ここでは、 xy がオレンジ色、 xz が赤色、 yz が黄色、 xyz が青色である。

ただし、最初に塗られた領域の位置とそこから塗り分けられる方向によっては、色の配置が変わってくることに注意を要する。

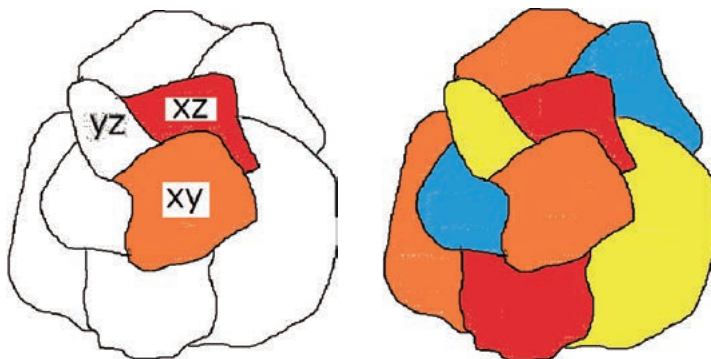


図 5

注) 左図の空白領域の yz は、3 番目に塗る色を示す。左図のもとで付録の変換式を使うことによって右図では 4 色で塗り分けられている。

ここでは、付録に整理されている変換式を使えば、領域数がどんなに多くても四色で地図は塗り分けることができる。これだけでは、四色問題の完全な証明とはならないために以下では 4 つのペイントで 5 つ以上の色を作ったとしても 4 色あれば地図が塗り分けられることを明らかにする。また、4 色あれば循環空白領域にもとづいて一般空白領域にても塗り分け可能であることを説明する。

3. 5 色以上必要としない理由

ここで 4 本目のペイント w を追加した場合、計 11 の混合色が作られる。上記同様に、すべての領域に塗られた色から成る混合色としての色は $x^n y^m z^p w^s$ で表される。そこで、最初の領域とそれと隣接する領域の色、そこから塗り分けられる色は以下の変換式によって求められる。そこでは第 1 項を除いて、色 w と関わる色は削除される。

(a) $n > m > p > s$ のケース

$$\begin{aligned}
 x^n y^m z^p w^s &\rightarrow x^{n-m-p-s} (xy)^{m-p-s} (xyz)^{p-s} (xyzw)^s \rightarrow (xy)(xyz)(xyzw) \\
 &\rightarrow (xy)(xyz) \rightarrow (xy)(yz) \rightarrow xz
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
x^n y^m z^p w^s &\rightarrow x^{n-m-p-s} (xy)^{m-p-s} (xyz)^{p-s} (xyzw)^s \rightarrow (xy)(xyz)(xyzw) \\
&\rightarrow (xy)(xyz) \rightarrow (xy)(xz) \rightarrow yz
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし、 $1 \leq s$ である。(以下同様)

(8) および (9) の第4項、第5項、第6項を通じて、色 w と関わる色を削除しても4色による組み合わせが示されていることから、4色で地図上の領域が塗り分けられることを示している。したがって、色 w の追加によって5色以上の色を作ったとしても、それらの色を空白の領域に使う必要がないことから4色あれば地図が塗り分けられることになる。

(b) $n > m > p = s$ のケース

$$\begin{aligned}
x^n y^m z^p w^p &\rightarrow x^{n-m-p} (xy)^{m-p} (xyzw)^p \rightarrow (xy)(xyzw) \\
&\rightarrow (xy)(yz)(xw) \rightarrow (xy)(yz) \rightarrow xz
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
x^n y^m z^p w^p &\rightarrow x^{n-m-p} (xy)^{m-p} (xyzw)^p \rightarrow (xy)(xyzw) \\
&\rightarrow (xy)(xz)(yw) \rightarrow (xy)(xz) \rightarrow yz
\end{aligned} \tag{11}$$

(10) および (11) を通じて、3色で地図が塗り分けられることを示している。

(c) $n > m = p = s$ のケース

$$x^n y^m z^m w^m \rightarrow x^{n-m} (xyzw)^m \rightarrow xyzw \rightarrow xy, xz, yz \tag{12}$$

$m = 3r$ の場合、

$$\begin{aligned}
x^n y^{3r} z^{3r} w^{3r} &\rightarrow x^{n-3r} (xyzw)^{3r} \rightarrow ((xy)(xz)(xw)(yz)(yw)(zw))^r \\
&\rightarrow (xy)(xz)(yz) \rightarrow xyz
\end{aligned} \tag{13}$$

(12) から、全て4つのペイントから成る混合色 $xyzw$ は、ペイント w を除いて作られる3つの色のどれかと代替できることを示している。また、(13) から地図の形状によっては、4色が使われる場合があることを示している。

(d) $n=m=p=s$ のケース

$$x^n y^n z^n w^n \rightarrow (xyzw)^n \rightarrow xyzw \rightarrow xy, xz, yz \quad (14)$$

$n=3r$ の場合、

$$\begin{aligned} x^{3r} y^{3r} z^{3r} w^{3r} &\rightarrow (xyzw)^{3r} \rightarrow ((xy)(xz)(xw)(yz)(yw)(zw))^r \\ &\rightarrow (xy)(xz)(yz) \rightarrow xyz \end{aligned} \quad (15)$$

(14) および (15) については、(c) のケースと同様な解釈となる。

上記から、全てのケースを考慮すると、 w と関連する色を削除しても 3 色または 4 色あれば地図が塗り分けられることを示している。これで、色の数は領域の数だけあれば塗り分けられるが、5 色以上の色があってもそれらの色にこの 4 色だけで代替できるために 4 色あれば地図は塗り分け可能となる。

3. 3 色または 4 色で塗り分けられる循環領域から一般領域へ

中心領域に循環隣接する領域数が偶数の場合の空白領域に、色 xy と色 xz がそれぞれ交互に n 回繰り返されて塗られると、 $(xy)^n (xz)^n$ からそれぞれの領域数の数は指数で表される。また、 $(xy)^n (xz)^n = x^{2n} y^n z^n$ から、この右辺の 3 つのペイントの指数はそれぞれのペイントが関わっている領域数を示している。この地図上でペイント x が関わっている領域数は $2n$ で最も多く、これは偶数であることを示している。したがって、最初の空白領域とそれに接する空白領域、その後追加される隣接空白領域の色は、以下の変換式によって求められる。

$$x^{2n} y^n z^n \rightarrow x^{2n} (yz)^n \rightarrow yz, \quad (16)$$

$$x^{2n} y^n z^n \rightarrow (xy)^n (xz)^n \rightarrow (xy)(xz) \rightarrow yz, \quad (17)$$

$$x^{2n} y^n z^n \rightarrow x^n (xyz)^n \rightarrow (xyz)^n \rightarrow xyz \quad (18)$$

(16) および (18) から、最初の領域に塗られる色は yz または色 xyz であり、それに接する領域の色は xyz または yz である。これは、循環領域において中心となる色であることを意味する。ここでは、(17) から色 xy と色 xz が交互に循環して行くので、循環の中心になる領域の色は yz に設定される。

また、循環領域の最後の色が xy または xz で終わる場合、ここでの地図は 3 色で塗り分けられる。これについては、以下の 2 つの変換式、

$$(xyz)(xy) \rightarrow (xy)(yz) \rightarrow xz、 \quad (19)$$

および

$$(xyz)(xz) \rightarrow (xz)(yz) \rightarrow xy \quad (20)$$

からも分かる。

(19) および (20) のそれぞれ第 1 項と第 3 項から循環領域の真ん中の領域の色が初めに xyz に設定されたケースであり、(19) および (20) のそれぞれ第 2 項と第 3 項から循環領域の真ん中の領域の色が初めに yz に設定されたケースである。したがって、循環領域の真ん中の領域を除く循環空白領域数が偶数 ($2n$) の場合は、3 色あれば地図は塗り分けられることを示している。(図 6 (1) 参照)

一方、上記の偶数 ($2n$) のケースに 1 つの空白領域を加え、循環空白領域が奇数 ($2n+1$) のケースでは、すべての領域に塗られた 3 本のペイントの使用量から成る混合色から変換式を用いて色の組み合わせとそれによって求められる色は、

$$x^{2n+1}y^{n+1}z^{n+1} \rightarrow x^{2n+1}(yz)^{n+1} \rightarrow yz、 \quad (21)$$

および

$$x^{2n+1}y^{n+1}z^{n+1} \rightarrow x^n(xyz)^{n+1} \rightarrow (xyz)^{n+1} \rightarrow xyz \quad (22)$$

で表される。

さらに、 n が奇数であれば、 $n+1$ が偶数であることから、 $2m=n+1$ として、(22) によるプロセスを踏まえると、

$$\begin{aligned} x^{4m-1}y^{2m}z^{2m} &\rightarrow x^{2m-1}(xyz)^{2m} \rightarrow x^{2m-1}((xy)(xz)(yz))^m \\ &\rightarrow (xy)(xz)(yz) \rightarrow xyz \end{aligned} \quad (23)$$

で表される。

(21) および (22) から、最初の空白領域の色とそれに接している空白領域の色は、 yz または xyz である。ただし、そのどちらの色が先に塗られても構わない。

(23) の第 4 項と第 5 項から、最終的に 3 本のペイントから作られる色 xyz の領

域がその色と異なる色を有する3つの隣接領域で構成されることを示している。したがって、(19)および(20)を踏まえた上で偶数循環領域において、追加の循環空白領域を考慮すると、ここでの地図が結果的に4色で塗り分けられることが分かる。(図6(2)参照)

要約すると、地図上の領域の形状がどうであれ、循環領域の真ん中でなくても最初の空白領域に色 y_z を塗り、ついで隣接する空白領域に色 xy を塗る。さらに、そこで塗られた色 y_z と色 xy の2つの領域に同時に接する空白の領域に色 x_z を塗る。このプロセスを通じて、最初の領域の色 y_z とそれと隣接する最後の領域に色 xy か色 x_z のどちらかが塗られ、すべてが3つの色で塗り分けられた領域で終わるか、その領域を含む3つの色の領域に隣接する領域の色 xyz の計4色で塗り分けられるかのどちらかである。ただし、ここでは y_z と xyz を入れ替えても同様である。その結果、すべての空白領域数は偶数または奇数であるため少なくとも4色あれば地図は塗り分けられることができる。したがって、隣接している2つの領域の色が設定されれば、空白の循環領域に交互に色が塗られていくことは、隣接する1つ目の領域、2つ目の領域、3つ目の領域と色が塗り分けられていくために、図7に描かれている様に図6における真ん中の領域が外部を覆う領域と同じ様相になるために、偶数または奇数の領域数に関わらず、色塗りのパターンにおいて少なくとも4色あれば地図が塗り分けられることができる⁶。

⁶ 循環領域数が奇数であっても完璧な連結なしの準循環型形状として最後の空白領域が最初の領域に繋がらず、接続している領域にしか接していない場合は3色あれば地図は塗り分けられる。したがって、循環領域の真ん中の領域が存在しない場合を考慮すると、1色減り、隣接する領域が1つ以上であれば2つの色のうち1つの異なる色を交互に塗って行くことによって2色で地図が塗り分けられることになる。

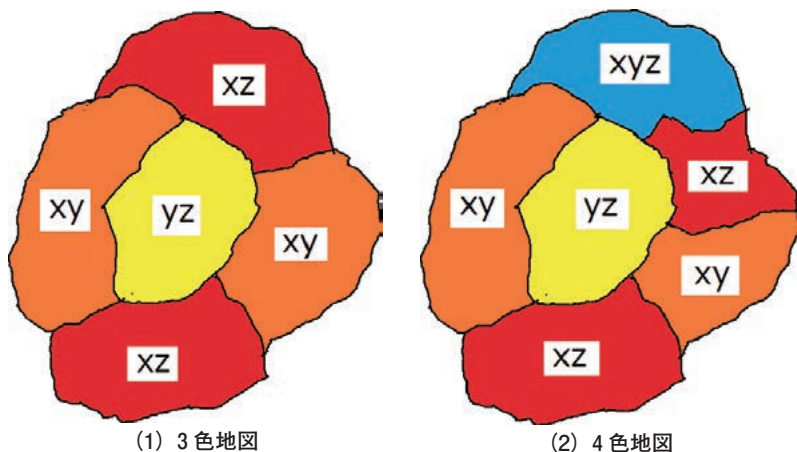


図 6

注) 左図(1)は3色使用のケース(循環領域数4)、右図(2)は4色使用のケース(循環領域数5)をそれぞれ示す。ただし、両図とも黄色の yz はスタートの色を、他の色は yz との組み合わせによって塗り分けられた色を示し、右図(2)の青色の xyz は最終領域の色を示す。

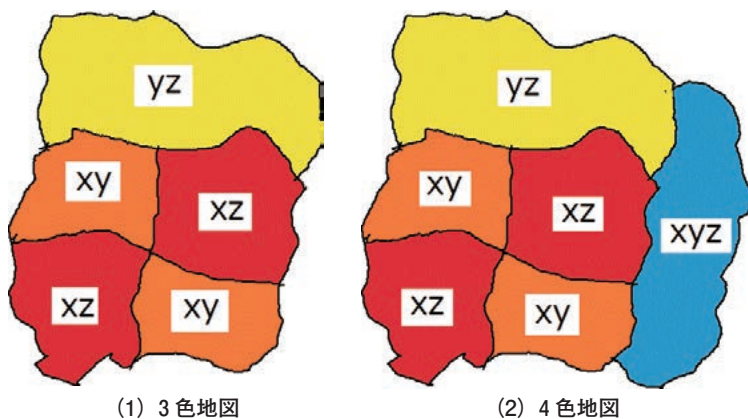


図 7

注) 図7(1)は図6(1)に、図7(2)は図6(2)にそれぞれ対応する。

4. 色の変換式を用いた日本地図への応用

付録の変換式を用いて、日本地図を4色で塗り分けると、図8のようになった。

ただし、上記の図と同様に、 xy はオレンジ色、 xz は赤色、 yz は黄色、 xyz は青色をそれぞれ示している。

ここでは、北海道については本土と新幹線が開通されていることから、本土と点で結ばれているとして図8に描かれている。また、沖縄については海を隔てているために図8において除かれている。なお、過去のグランドセイコーの工房の立地の研究⁷に鑑み、これと比較するために、雫石工房のある岩手県と塩尻工房のある長野県については予め黄色に、大都市圏の中心都市を有する自治体については予め赤色にそれぞれ設定した。ただし、日本地図が四色で塗り分けられたものの、大都市圏としての中心都市が存在しない栃木県が赤色に塗られたことは、制約付きの地図の塗り分けが難しいことを物語っている。

おそらく、最初に塗られる白地図の領域および塗られていく方向によって、意図する完璧な四色地図を描くことは可能であるかも知れないが、ここでは省略させて頂いた。また、塗り分け時の注意点として、白地図は少しでも拡大したものを使わないと、領域が点で接しているのか、線として接しているのか分からなくなってしまうことがある。

ちなみに、ここで解かれた四色問題の塗り分け方は、マーケティングにおける4つの異なる特長を有するチェーン店の立地、携帯電話等の4つの異なる周波数の地域別設定、スケジュールにおける人員の効率的配置計画などへの応用可能性を有している。

⁷ 神頭・望月・本多・山本(2023、第1章)における四色地図では、大都市圏の中心となる都道府県が予め同色で設定されている。

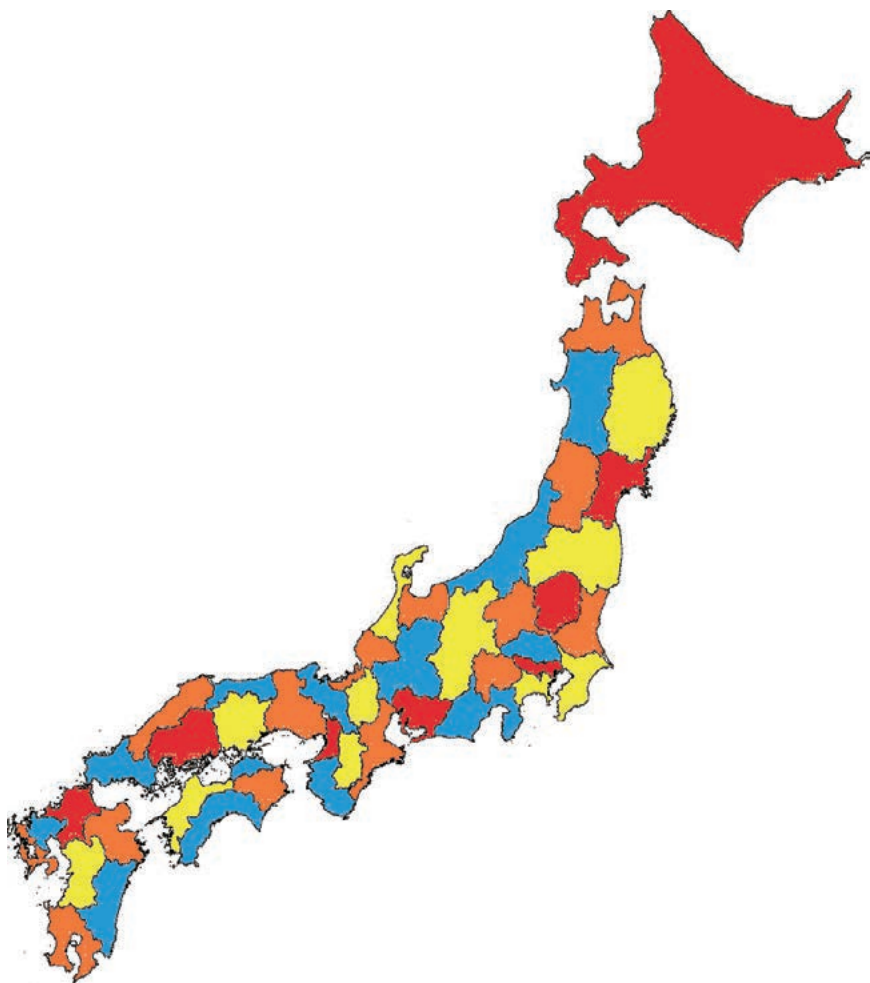


図 8

5. おわりに

ここでは、まず異なる色の3本のペイントを決めて、これら3つのペイントの組み合わせから作られる1つの色とそれぞれ2つのペイントの組み合わせから作られる3つの色とで計4つの色を設定する。ついで地図を塗り分けるに当たり、隣接する2つの空白領域に異なる色を塗る。さらに、塗られた2つの領域に同時に接している空白領域に2つとは異なる色が塗られる。これを付録にある変換式を使って繰り返していくと最終的に地図上の領域は少なくとも4つの色で塗り分けられることになる。

総じて、地図を塗り分けるのに5色以上必要ないこと、循環領域数の数において偶数であれば3色で塗り分けられ、それが奇数であれば4色で塗り分けられることなどが分かった。これで四色問題が解決されたと言えよう。

付録：四色の地図の塗り方（変換式集）

以下の変換式を使うと、どんな地図でも4色で塗り分けられる。（本論の整理）

1. $(xy)(xz) \rightarrow yz$
2. $(xy)(yz) \rightarrow xz$
3. $(xz)(yz) \rightarrow xy$
4. $(xy)(xyz) \rightarrow xz, yz$
5. $(xz)(xyz) \rightarrow xy, yz$
6. $(yz)(xyz) \rightarrow xy, xz$
7. $(xy)(xz)(yz) \rightarrow xyz$

上記の7つの式に登場する色は4色である。この7つの式を用いて、すべて使う必要はなく、まず地図上の2つの隣接する領域に異なる色を塗り、そこから同様に上式の組み合わせのもとで、隣接する空白領域に対して繰り返しながら色を塗って行くと、最終的に地図は少なくとも四色で塗り分けられることにな

る。なお、塗り分けをスムーズに行うためには、7番目の変換式は後回しにして、1から3の変換式からスタートすることをお薦めする。

これについては、図9(1)から xy と xz の組み合わせからスタートすると4色で地図は塗り分けられるが、図9(2)から xy 、 xz 、 yz の組み合わせからスタートすると5色でないと地図が塗り分けられないケースがあるためである。

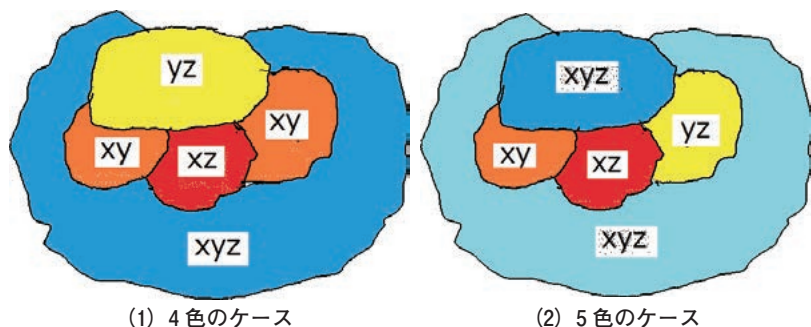


図9

注) 右図(2)の xyz は、どちらかが異なる色でなければならないことを示している。

実際に、 xy 、 xz 、 yz 、 xyz のそれぞれ4色に対して自分の好みの色を指定して、地図を塗り分ければ四色の地図が完成する。

参考文献

- Appel, K. and W. Haken (1977) *The Solution of the Four-Map- Problem*, SCIENTIFIC AMERICAN, October (島内剛一訳「4色問題の解決」『別冊 日経サイエンス172』)
- Benjamin, A. Chartrand, A. and P. Zhang (2015) *The Fascinating World of Graph Theory*, Princeton University Press. (松浦俊輔 (訳)『グラフ理論の魅惑の世界』青土社、2015年)
- Kozu, H. (2022) *Space and Order of Four Colors*, Book series Vol.7, Institute of Managerial Research, Aichi University. (book57.pdf (aichi-u.ac.jp) にて閲覧可)
- Ore, O. (1967) *The Four-Color Problem*, Academic Press.
- Saaty, T.L. and P.Kainen(1977) *The Four Color Problem—Assaults and Conquest*, McGraw-

Hill.

Willson, R. (2002) *Four Colours Suffice*, Allen Lane Science. (茂木健一郎 (訳) 『四色問題』新潮文庫、2004年)

一松 信『四色問題』講談社、2016年

NHK 制作班編『笑わない数学』(株) KADOKAWA、2023年

神頭広好『数と色をつなぐペイント理論』愛知大学経営総合科学研究所叢書60、2023年、
愛知大学経営総合科学研究所 (book60.pdf (aichi-u.ac.jp) にて閲覧可)

神頭広好・望月恒男・本多毅・山本大造『グラントセイコーの経営と立地』愛知大学経営総合科学研究所叢書60、2023年、愛知大学経営総合科学研究所 (book62.pdf にて閲覧可)

神頭広好 (A) 「ペイント理論のベーシックに関するノートー「 $a=b^m=1$ 」の法則ー」『経営総合科学』第120号、2024年、3月、pp.259-266、愛知大学経営総合科学研究所 (120.pdf (aichi-u.ac.jp) にて閲覧可)

神頭広好 (B) 「四色問題におけるエレガントな解」第121号、2024年、10月、pp.1-19、愛知大学経営総合科学研究所 (修正された 001-121_KOZU.pdf にて閲覧可)

神頭広好 (C) 「ペイント理論のベーシックに関するノート IIー「 $a=b^m$ 」の法則ー」『経営総合科学』第121号、2024年、10月、pp.69-75、愛知大学経営総合科学研究所 (006-121_KOZU.pdf にて閲覧可)

根上生也「四色問題」『数学100の問題、数学セミナー編集部編』日本評論社、1999年、pp.158-160.

竹内外史「四色問題=ついに解決!」『数学セミナー』1976年、10月号、pp.2-6

執筆者一覧

(第1章、第2章、第4章)

神 頭 広 好 愛知大学名誉教授
愛知大学経営総合科学研究所名誉研究員

(第2章)

竹 内 啓 仁 愛知大学経営総合科学研究所客員研究員
加 藤 好 雄 福知山公立大学地域経営学部准教授
愛知大学経営総合科学研究所客員研究員

(第3章)

野 呂 純 一 目白大学社会学部専任講師
愛知大学経営総合科学研究所客員研究員

愛知大学経営総合科学研究所叢書 64

立地と空間の秩序

2025年9月25日発行

著 者 神頭広好・竹内啓仁・加藤好雄・野呂純一

発行所 愛知大学経営総合科学研究所

〒453-8777 名古屋市中村区平池町4-60-6

印刷・製本 株式会社 荒川印刷

〔非売品〕

