[論　説]

初等数学によるリーマン予想の一証明

神　頭　広　好

1．はじめに

リーマン予想（1859）［鹿野編（1991）］に関する研究論文については、数学の分野では数多く存在するが、その多くは素数と虚数の研究から始められている[1]。チューリング以降コンピュータサイエンスを通じて枚挙にいとまがないくらいゼータ関数のゼロ値が計算されていてもこの予想の矛盾については証明されていない。

ちなみに、リーマン予想は、「ゼータ関数の自明でないゼロ点は、実数部分が $\frac{1}{2}$ である」ということを示している[2]。すなわち、ゼータ関数のゼロ点において成立する複素数について実数部分が $\frac{1}{2}$ であることを予想したのである。

ここでは、まず有限の空間を考え、ゼータ関数の不等式における中央値のところでのゼータ関数を仮定する。ついで無限の空間に拡大することによって、そのゼータ関数がゼロとなる条件のもとで構築された関数から、それをゼロとする複素数が導かれる。その結果、素数を含む奇数の間隔においてリーマン予想が成立することが説明される。

2. 初等数学によるリーマン予想の一証明

まずリーマンのゼータ関数は、

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right)\cdots \tag{1}$$

で表される。

ここでは、(1) 式から有限のモデルを考えると、

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}$$

$$=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right) \tag{2}$$

で表される。ただし、p は 1 から n の範囲内における最後の素数を示す。

このゼータ関数の第 2 項目の和による部分の範囲は、まず s を実数としてイメージすると、0<s において最初の 1 が最も高いことから、この関数における和は nを超えることができない。一方、第 3 項目の素数を含む積の部分は $\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}$ 以上である。これらを踏まえて、(2) 式を不等式で表すと、

$$n\geq\zeta(s)\geq\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \tag{3}$$

を得る。ここで、中央値でゼータ関数のゼロ点を満たすゼータ関数が存在するとすれば、このゼータ関数 $\hat{\zeta}(s)$ は、

$$\hat{\zeta}(s)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right) \tag{4}$$

で表される。さらに、有限表示において、

$$\hat{\zeta}(s)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)=\frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\cdots+\frac{1}{2^{2ns}}\right) \tag{5}$$

で表される。ただし、ここでは s が虚数の場合を考慮して、偶数の項で終わるようにした。

(5) 式から、$\hat{\zeta}(s)=0$ となる条件は、

$$n+1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\cdots+\frac{1}{2^{2ns}}=0 \tag{6}$$

である。また、(6) 式が成り立つのは、最後に加算される項によるので、虚数を考慮すれば偶数である必要がある。ここで、$s=a+bi$ として、これを (6) 式へ代入すると、

$$n+1+A+\frac{1}{2^{2n(a+bi)}}=0 \tag{7}$$

で表すことができる。ただし、$A=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2^{(2m-1)(a+bi)}}$ である。

さらに、(7) 式を解くと、

$$a+bi=\frac{\log(-n-1-A)}{-2n\log 2}=\frac{\log_2(-n-1-A)}{-2n} \tag{8}$$

が得られる。また、$\log 2\approx 1$ として、$\log(-n-1-A)$ を線形に近似できるとすれば、

$$\log(-n-1-A)=-n-2-A \tag{9}$$

で表される。(9) 式について近似計算すると 0.3 ほどの誤差において、$0.4\leq -n-2-A\leq 1$ での近似範囲が成立する。(9) 式を (8) 式へ代入すると、

$$a+bi=\frac{n+2+A}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{A}{2n} \tag{10}$$

に書き換えられる。

さらに、n→∞とすれば、$\frac{1}{n}\approx 0$ である。また、A は複素数で表されているが、実数部分は n →∞であることから、(10) 式は、

$$s=\frac{1}{2}+\frac{A}{2n}=\frac{1}{2}-gi \tag{11}$$

で書き換えられる。ただし、$\frac{A}{2n}=-gi$ である。(付録参照)

ここでは、a に関わりなく (11) 式が成り立つことに注意を要する。ところで、(3) 式の範囲内であれば、ゼータ関数は中央値で成立する必要はない。また、最後の項が奇数 2n−1 であっても n→∞であるため (11) 式が成り立つ。

一方 s<0 の場合は、(3) 式とは符号が逆になる。$\hat{\zeta}(s)$ の存在する範囲は、

$$n\leq\hat{\zeta}(s)\leq 1+2^{s}+2^{2s}+\cdots+2^{2ns} \tag{12}$$

で表される。ここで、(12) 式は発散するために、第 3 項から第 1 項の差の中央値でゼータ関数のゼロ点を満たすゼータ関数が存在するとすれば、このゼータ関数 $\hat{\zeta}(s)$ は、

$$\hat{\zeta}(s)=\frac{1}{2}(-n+1+2^{s}+2^{2s}+\cdots+2^{2ns}) \tag{13}$$

で表される。$\hat{\zeta}(s)=0$ であるためには、

$$0=-n+1+2^{s}+2^{2s}+\cdots+2^{2ns} \tag{14}$$

が成り立つ必要がある。ここで、s=a+bi とすると、(14) 式から、

$$-n+1+A+2^{2n(a+bi)}=0 \tag{15}$$

で表すことができる。ただし、$A=\sum_{m=1}^{n}2^{(2m-1)s}$ である。

(15) 式から、s について解くと、

$$s=\frac{\log(n-A-1)}{2n\log 2}=\frac{\log_2(n-A-1)}{2n} \tag{16}$$

で表される。上記同様に $\log 2\fallingdotseq 1$ として、$\log(n-A-1)$ を線形に近似すると、(16) 式は、

$$s=\frac{\log(n-A-1)}{2n}=\frac{n-2-A}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{A}{2n} \tag{17}$$

で表される。ここで、$n\to\infty$とすれば、$\frac{1}{n}\fallingdotseq 0$ となり、(17) 式は、

$$s=\frac{1}{2}-\frac{A}{2n}=\frac{1}{2}+gi \tag{18}$$

で表される。ただし、$-\frac{A}{2n}=gi$ である。(付録参照)

したがって、$\zeta(s)=\hat{\zeta}(s)=0$ が成立する s は $\frac{1}{2}$ を通る複素数である。これでリーマン予想が証明された。

ただし、最後の項で $\hat{\zeta}(s)=0$ が決定されるために、$n\to\infty$であっても 1 つ前の項までは、すでに計算されていることが前提である。また、そこで計算された値は、自然数の無限の大きさからすれば奇数を隔てた素数間の大きさは微々たるものであり、その結果としてリーマン予想が成立する。

＜付録＞

$0<s$ の場合、(7) 式の A から、

$$\frac{1}{2^{(2n-1)(a+bi)}}=d$$

として、この式を解くと、

$$a+bi=\frac{\log d}{-(2n-1)\log 2}=\frac{\log_2 d}{-(2n-1)}$$

を得る。ただし、log2≈1である。また、1≦d<2として、logdを線形近似すると、

$$\log d = d-1$$

で表される。それゆえ、

$$a+bi=\frac{d-1}{-(2n-1)}=\frac{1-d}{2n-1}$$

が成り立つ。

さらに、d=w+giとすると、

$$a+bi=\frac{1-w}{2n-1}-\frac{gi}{2n-1}$$

で表される。また、n→∞であれば、かつwが相対的に小さければ、

$$a+bi=-\frac{gi}{2n-1}$$

となる。これより、d≈−giとすると、$\zeta(s)=\hat{\zeta}(s)=0$ を満たすsは、

$$s=\frac{1}{2}+\frac{A}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{(2n-1)d}{2n}\approx\frac{1}{2}+d=\frac{1}{2}-gi$$

で示される。

一方、s<0の場合、(15) 式のAから、

$$2^{(2n-1)(a+bi)}=d$$

とすると、上記と同様な分析から、$\zeta(s)=\hat{\zeta}(s)=0$ を満たすsは、

$$s=\frac{1}{2}+gi$$

で示される。

3．おわりに

ここでは、まずゼータ関数の有限の範囲を前提にして、ゼータ関数が存在する範囲を設定した。ついで、その範囲においてゼータ関数は、素数の出現が不規則であることから、中央値にあるとした。また、リーマン予想を証明する上で、対数の線形近似を用いて、ゼータ関数がゼロであるところで計算された複素数が実数部分において $\frac{1}{2}$ であることが示された。そこでは、必ずしもゼータ関数が中央値で成立する必要はなく、設定された範囲内であれば成立する。また、最後の項が奇数 2n－1 であっても予想は成立する。ここでは有限から出発しているが、そこでのプロセスにおいて無限へと発展させており、最終的には素数を含む奇数間隔で起こりうるリーマン予想を説明していると考える。

この場を借りて、本拙論が、今後のリーマン予想の証明の一助となれば幸いである。

注

1　これについては、黒川（2012、2014、2019）によって最近の研究成果およびリーマン関数について平易に説明されている。また、素数との関連において Newton（2020）および NHK（DVD）はたいへん参考になった。

2　これについては、竹内（2015、第 4 章)、小島（2013、第 6 章）および小島（2017、第 7 章）において平易に説明されている。また、3 次元の図については Newton（2018）『数学の世界』 Newton Press、11 月 5 日発行、pp.104-105 を参照せよ。

参考文献

鹿野　健編（1991）『リーマン予想』 日本評論社
黒川信重（2012）『リーマン予想の探求』 技術評論社
黒川信重（2014）『リーマン予想を解こう』 技術評論社
黒川信重（2019）『リーマン予想の今、そして解決への展望』 技術評論社

小島寛之（2013）『世界は 2 乗でできている』講談社ブルーバックス
小島寛之（2017）『世界は素数でできている』角川新書
竹内　薫（2015）『素数はなぜ人を惹きつけるか』朝日新書
竹内　薫（2019）『虚数はなぜ人を惑わせるのか』朝日新書
Newton（2018）『虚数がよくわかる』Newton Press、6 月 5 日発行
Newton（2018）『数学の世界』Newton Press、11 月 5 日発行
Newton（2020）『素数』Newton Press、2 月 25 日発行

資料

NHK（DVD）『リーマン予想　天才たちの 150 年の闘い』(2009 年 11 月 21 日 NHK BS-hi にて放送)