

〔研究ノート〕

ペイント理論にもとづく数学の難問に関する研究 —フェルマー数、ルジャンドル予想、完全数の総数問題—

神 頭 広 好

I はじめに

本研究では、神頭（2024A、B）における自称ペイント理論を基本として、ペイントの使用量から色の明度に変換または逆の変換を通じて、数学の難問を解いている。

最近、神頭（2023）ではペイント理論およびそれを7つの数学の難問に応用している。

さらに、ここではフェルマー数、ルジャンドル予想、完全数の総数問題の証明について触れる。

II 数学未解決問題の証明への接近

以下では、数学の難問と言われている3つの問題にペイント理論を応用する¹。

1. ペイント理論にもとづくフェルマー数

フェルマー数の存在

「 $n \geq 0$ の存在で

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad (1)$$

の形で表される素数（フェルマー素数）は、

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

のみである」

(1) は色 2 の明度として累乗で表されており、明度としての 1 は 0 と同じ意味を持つために、(1) の 1 は消去されて、

$$\hat{F}_n = 2^{2^n} \quad (2)$$

に書き換えられる。さらに、(2) をペイント 2 の使用量表示にすると、

$$\tilde{F}_n = 2^n 2 \quad (3)$$

に変換される。ただし、(3) における 2^n は明度表示であるが色（色相）2 の使用量とする。

ここで、 2^n は無限に存在するために、ペイントの使用量には限界があるとすると、

$$2^n \leq 2n + (2n + 1) \quad (4)$$

が考えられる。これは偶数を基準にして、次に大きい数である奇数との和であり、最小の和であることを示している。(4) が成立する n の範囲は $0 \leq n \leq 4$ である。この範囲において (4) から、

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \leq 2^{4n+1} + 1 \quad (5)$$

が常に成立する。

したがって、 $0 \leq n \leq 4$ において、

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \quad (6)$$

を計算すると、

$$n=0 \text{ の時、 } F(0)=3$$

$$n=1 \text{ の時、 } F(1)=5$$

$$n=2 \text{ の時、 } F(2)=17$$

$$n=3 \text{ の時、 } F(3)=257$$

$$n=4 \text{ の時、 } F(4)=65537$$

が導かれる。これらの奇数はフェルマー数である。

最終的に、フェルマー数はペイントの世界において導かれる。

2. ペイント理論を使わないフェルマー数の導出

ここで、ゴールドバッハ予想²にしたがうと、素数の範囲は、

$$2n < P < 2(2n+1) \quad (1)$$

と書くことができる。ただし、 P は 2 つの素数 n と $2n+1$ の和を示す。

さらに、メルセンヌ素数も名のごとく素数であることから、(1) の P を 2 と 2^n-1 の素数の和に置き換えると、

$$4 < 2^n - 1 + 2 < 2(2n+1) \quad (2)$$

または、

$$4 < 2^n + 1 < 2(2n+1) \quad (3)$$

で表される。ここで、 $n=0$ は自然数に含まれないが、フェルマー数を考慮すると、 $n=0$ の時、(3) の第 1 項と第 2 項が等しくなるために (3) は、

$$2 \leq 2^n + 1 \leq 2(2n+1) \quad (4)$$

に書き換えられる。

したがって、(4) を満たす n の範囲は $0 \leq n \leq 4$ である。それゆえ、この範囲から、

$$2^n \leq 2^4 \quad (5)$$

が成立する。さらに、(5) から、

$$2^{2^n} \leq 2^{2^4} \quad (6)$$

が成立する。また、(6) の両辺に 1 を足すと、

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \leq 2^{2^4} + 1 \quad (7)$$

が成立する。この $F(n)$ の n に 0、1、2、3、4 をそれぞれ代入して計算すると 5 つのフェルマー数が導かれる。

一方、上記 1 同様に $(2n) + (2n+1)$ の以下の範囲において、メルセンヌ素数が存在するならば、

$$2^n - 1 \leq (2n) + (2n+1) \quad (8)$$

で表される。さらに (8) を変形すると、

$$2^n \leq 2(2n+1) \quad (9)$$

が得られる。ここで (9) を満たす n は $0 \leq n \leq 4$ に限定される。したがって、(7) と同様に、

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \leq 2^{2^4} + 1 \quad (10)$$

が成立する。(10) における $F(n)$ から、5 つのフェルマー数が導かれる。

ここでは、フェルマー数はメルセンヌ素数の上限の範囲から導かれることが分かった。

3. ペイント理論にもとづくルジャンドル予想

ルジャンドル予想は、

「任意の自然数 n について、 n^2 と $(n+1)^2$ の間には必ず素数が存在する。」である。

この予想の数式は、

$$n^2 < P < (n+1)^2 \quad (1)$$

で表される。ただし、 P は素数を示している。

(1) はペイント理論において明度表示の式であり、明度に同明度を何度乗じても変わらない。したがって、 P が素数であれば (1) は、

$$n < P < (n+1) \quad (2)$$

で表される。ここで明度は自然数で表されることから、(2) は、

$$n \leq P \leq (n+1) \quad (3)$$

に書き換えられる。

さらに、明度の 1 は 0 でもあるために、明度についての足し算の問題が解消される。したがって、(3) は、

$$n \leq P \leq n \quad (4)$$

で表される、(4) から、

$$p = n \quad (5)$$

が成立する。自然数 n は素数を含むことから、この予想はペイント理論にお

いて成立する。

4. 完全数の総数問題

「それ自身の数を除く正の約数の和が、約する前の数と一致する数を完全数と呼ぶ。(例、 $1 + 2 + 3 = 6$) または自然数 n の約数の和が $2n$ のとき n を完全数と呼ぶ」

ここで、完全数は無数に存在するか？という問いが投げかけられている。

この問いについては、ペイント理論を用いて、以下で説明される。

(1) 3 色のケース

$$1 + x + y = xy \quad (1)$$

ペイント理論の基本（神頭（2024A および2024B））から、(1) は、

$$a^2(1 + x + y) = b^3xy \quad (2)$$

で表される。ただし、(2) における1は一般性を欠くために、1 は z でも構わない。

さらに、ここで、全体の使用量からすると、 x より y の量はかなり大きいとすると、(2) を y で除することによって相対的数値に変換すると、

$$a^2\left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1\right) = b^3y \quad (3)$$

で表される。ただし、(3) の右辺においてペイント x がほんの僅かな量であることから無視され、ペイント y だけが残っていることを示している。

さらに、(3) から、

$$a^2 = by \quad (4)$$

で示される。(4) からペイント理論の法則において $a^2 = b$ であることから、

$y \neq 1$ であるために、この完全数の体系がくずれる。

ここで、 $b=a$ とすると、(4)において $y=a$ が成立する。したがって、 a は自然数であり、素数も含むことから、完全数は無数に存在する。

(2) 四色のケース

上記同様に、 x および y のそれぞれがかなり小さく、 z がかなり大きい場合、相対的数値は、

$$a^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right) = b^4 xyz \quad (5)$$

で表される。さらに、使われたペイント量が微々たるものは除かれ、かなり使用された色は存在するために、(5)は、

$$a^2 = bz \quad (6)$$

で示される。ここで、上記同様に $b=a$ とすれば、 $z=a$ であり、 a は素数を含むために、完全数は無数に存在することになる。

(3) 多数色のケース

上記と同様な方法で一般形は、

$$a^2 (x_1 + x_2 + \cdots + x_m) = b^m x_1 x_2 \cdots x_m \quad (7)$$

で表される。(7)において x_m 以外はペイント使用量としては少なく、すべて相対的に小さい素数として、(7)を x_m で除すると、

$$a^2 \left(\frac{x_1}{x_m} + \frac{x_2}{x_m} + \cdots + 1 \right) = b^m x_1 x_2 \cdots x_m \quad (8)$$

で表される。さらに、(8)から、微々たる使用量の色は削除されるために、

$$a^2 = bx_m \quad (9)$$

で表される。ここで、 $x_m \neq 1$ であることから、上記同様に $b=a$ とすると、 $a = x_m$ である。 a は素数の積を含むために、完全数は無数に存在する。したがって、ペイント理論のもとでは、完全数は無限に存在することになる。ここでは、奇数の完全数も存在することになる。

双子素数の無限の存在

単色の明度は、素数で表されることから、ペイント表示で、

$$p < p+1 < p+2 \quad (1)$$

で表される。ただし、 p および $p+2$ は素数である。

(1) を明度表示に変換すると、さらに1と0は同じ意味を持つことから、

$$2p < p \quad (2)$$

で表される。(2) は明度の大きさが $2 < p$ であることを示唆している。(2) は常に成立することから、ペイントの世界において、単色が無数に存在するならば、双子素数は無限に存在することになる。

おわりに

ここでは、ペイント理論を用いて、フェルマー数、ルジャンドル予想、完全数の総数問題の証明について挑戦した。とりわけ、完全数の問題はペイント理論のベースとなる考え方であり、ABC理論とも重要なつながりを有している。

とりわけ、フェルマー数については明度の足し算を最終的にどのように捉えていくかが今後の課題である。

ペイント理論にもとづく数学の難問に関する研究

注

- 1 ここで扱う数学の難問については、関根（2006）、銀林（2015）および数論の未解決問題 | 数学の星 (math-jp.net) に掲載されている。
- 2 この予想にペイント理論を応用したものについては神頭（2023, pp. 7-12）を参照せよ。

参考文献

- 神頭広好『数と色をつなぐペイント理論』愛知大学経営総合科学研究所叢書60、2023年、愛知大学経営総合科学研究所（book60.pdf (aichi-u.ac.jp) にて閲覧可）
- 神頭広好「ペイント理論のベーシックに関するノート—「 $a^2=b^n=1$ 」の法則—」『経営総合科学』第120号、2024年 A、3月、pp. 259-266、愛知大学経営総合科学研究所（120.pdf (aichi-u.ac.jp) にて閲覧可）
- 神頭広好「ペイント理論のベーシックに関するノートⅡ—「 $a^2=b^n$ 」の法則—」『経営総合科学』第121号、2024年 B、9月、pp. 69-75、愛知大学経営総合科学研究所（HP にて閲覧可）
- 関根章道『人に話したくなる数学おもしろ定理』技術評論社、2006年
- 銀林 浩『初等整数論入門』筑摩書房、2015年

資料

数論の未解決問題 | 数学の星 (math-jp.net)

