

〔研究ノート〕

コラッツ予想の証明へのアプローチ

神 頭 広 好

はじめに

1930年代ごろ、学生であったコラッツは数論的関数を有向グラフとして表現して、そのグラフの性質が関数のふるまいとどのように関連付けられるかを考え、1950年の国際数学会議において広くこの問題が知られるようになり、1963年に初めてこれまでのコラッツの研究成果が紙面に引き上げられたということである¹。

近年、コラッツ予想に関してアルゴリズムおよび統計的研究としては、Garner (1981)、Gluck and Traylor (2001) などが上げられる。一方、数列からのアプローチとしては、Lagarias, Jeffrey C. (2010, PART I) に整理されている。最近 Tao (2022) は、コラッツ数列における最小値は、すべて対数値によって達成されることを説明している。

本論では3を乗ずる数列の構造に潜んでいるシステムを再生していくことによって、コラッツ予想が満たされる条件を求め、そこで導かれた3を初期値としてコラッツ予想にしたがって計算して行くと、最終的に1に到達する。ここでの一連の数値は、どの奇数からの計算においても辿ることになる。それゆえコラッツ予想は、証明されたと考える。

コラッツ予想の証明へのアプローチ

コラッツ予想²は、以下に示される。

「偶数であれば2で割り、奇数ならば3倍して1を足す。これを繰り返すことによって、いつかは1になる」(別名 $3x+1$ 問題とも呼ばれている)

ここでは、奇数を

$$2n+1 \tag{1}$$

として、(1)を $3x+1$ へ代入して、コラッツ予想にしたがって奇数を当てはめながら順次計算して行くが、以下では2で割り切られた奇数を $3x+1$ に当てはめるのではなく、1が足される前の奇数を当てはめて行くと、

$$3^0(2n+1)+1=3^0 2n+3^0+1=2n+1+1 \tag{2}$$

$$3(2n+1)+1=3 \cdot 2n+3+1 \tag{3}$$

$$3(3 \cdot 2n+3)+1=3^2 \cdot 2n+3^2+1 \tag{4}$$

$$3(3^2 \cdot 2n+3^2)+1=3^3 \cdot 2n+3^3+1 \tag{5}$$

$\vdots$

$$3(3^{\gamma-1} \cdot 2n+3^{\gamma-1})+1=3^{\gamma} \cdot 2n+3^{\gamma}+1 \tag{6}$$

が得られる。ただし、 γ は0を含む自然数として定義する。

(6)において、その値が2の累乗であれば、コラッツ予想として(6)で終了となる。

ここで、(6)の右辺を 2^a として、偶数を $3^{\gamma} \cdot 2n$ と $3^{\gamma}+1$ の2つに分けて、それぞれ 2^b とすると、(6)から、

$$(3^{\gamma} \cdot 2n)+(3^{\gamma}+1)=2^b+2^b=2^{b+1}=2^a \tag{7}$$

が成立する。

前者については、

$$3^{\gamma} \cdot 2n = 2^b \quad (8)$$

または、

$$3^{\gamma} \cdot n = 2^{b-1} \quad (9)$$

で表される。

一方、後者については、

$$3^{\gamma} + 1 = 2^b \quad (10)$$

で表される。ここで、(10) を (9) で割ると、

$$\frac{3^{\gamma} + 1}{3^{\gamma} n} = \frac{2^b}{2^{b-1}} = 2 \quad (11)$$

である。

さらに、(11) を整理すると、

$$1 = 3^{\gamma} (2n - 1) \quad (12)$$

を得る。(12) が成立するのは、 $\gamma = 0$ および $2n - 1 = 1$ 、すなわち、 $n = 1$ の場合である。

これらの値を (6) へ代入すると、 $4 (= 2^2)$ が得られる。これにより1に到達するために (6) で終了となる。

さらに、 $n = 1$ を (1) へ代入すると、

$$2n + 1 = 3 \quad (13)$$

が得られる。この3を $3x + 1$ へ代入して、コラッツ予想にしたがって計算して行くと、

10、5、16、8、4、2、1

(14)

が得られる。これは、 $3x+1$ へ代入されたとの奇数でも、(14)の一連の数値を通じて1に到達することを示している³。ただし、最初に2の累乗値が算出される場合は、16、8、4、2、1の一連の数値または2を通じて1に到達することを示している。また、5については、(14)から5を除いて16、8、4、2、1が計算され、1に到達することを示している。

要約すると、初期の任意の奇数 $2n+1$ は、これに 3^0 を乗じた値と同じになるために、ここでは $0 \leq \gamma$ としている。また、コラッツ予想が展開された式において2の累乗の値が存在する場合の条件として、 $\gamma=0$ および $n=1$ が導かれ、それによって奇数として3が求まる。すなわち、最初に $3x+1$ へ代入する奇数が何であれ、3を初期値としてコラッツ予想にしたがって1になるまで計算すると、一連の値を必ず通過することになる。

これについては、奇数は偶数を2で割り切れた数であると言えるため、奇数を代入した3掛けの奇数であっても、3掛けの奇数を伴っているコラッツ予想は、すべての場合において成立しなければならない。

おわりに

ここでは、最初に代入した奇数に対して3の倍数によってもたらされる奇数を $3x+1$ へ順次代入した場合、コラッツ予想を満たす条件として、最小の奇数3を必要としていることから、3を初期値としてコラッツ予想に従って計算すると1に到達する。

したがって、最初に投入される奇数が何であっても、3によって展開された一連の数値を通して1に到達することになる。そのため最終的にはコラッツ予想が正当化されることになる。それゆえコラッツ予想が証明されたと考える次

第である。

注

- 1 これについては、コラッツの問題—Wikipedia (<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%82%BF%E3%83%BC%E3%83%BB%E3%82%B3%E3%83%A9%E3%83%83%E3%83%84>) を参照。また、この予想については、Richard (2004, E16、訳 pp. 317-323) によって、コラッツ予想のこれまでの研究が整理されている。
- 2 この予想については、今野・成松 (2020、第 1 章) および NHK 制作班編 (2024、テーマ 2) によって容易に説明されている。また、この予想は「角谷の問題」とも呼ばれている。(難波、pp. 117-119)
- 3 これについては、理系のための備忘録— $n=1000$ までのコラッツ数列一覧 (<https://science-log.com/%e9%9b%91%e8%a8%98top%e3%83%9a%e3%83%bc%e3%82%b8/n1000%e3%81%be%e3%81%a7%e3%81%ae%e3%82%b3%e3%83%a9%e3%83%83%e3%83%84%e6%95%b0%e5%88%97%e4%b8%80%e8%a6%a7/>) を参照せよ。

参考文献

- Garner, Lynn E. (1981). “On the Collatz $3n+1$ algorithm”. *Proceedings of the American Mathematical Society* 82 (1): 19-22. (2025.3.3 閲覧)
- Gluck, D., and Traylor, B. (2001) A new statistic for the $3x+1$ problem. *Proceedings of the American Mathematical Society* 130: 1293-1301.
- Lagarias, Jeffrey C., ed (2010). *The ultimate challenge: the $3x+1$ problem*. Providence, R. I.: American Mathematical Society. (2025.2.20 閲覧)
- Tao, Terence (2022). “Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values”. *Forum of Mathematics, Pi* 10: E12. doi: 10.1017/fmp. 2022.8 (2025.3.7 閲覧)
- Richard K. Guy (2004) *Unsolved Problems in Number Theory*, Third Ed., Springer-Verlag New York Inc. (訳—金光 滋『数論〈未解決問題〉の事典』朝倉書店、2011年)
- NHK 制作班編『笑わない数学 2』KADOKAWA、2024年
- 今野紀雄・成松明廣『未解決問題から楽しむ数学』技術評論社、2018年
- 難波莞爾「角谷の問題」(数学セミナー編『数学100の問題』、日本評論社、2013年)