ISSN　0916-6432

経営総合科学

第 93 号

２０１０年　２月

愛知大学経営総合科学研究所

経営総合科学　第 93 号

〔論　　説〕

2010-2

〔論　説〕

コンパクトシティ都市圏の構想に向けて
――幾何学から見た都市圏の定義――

神　頭　広　好

Ⅰ　はじめに

都市圏の定義については、わが国では国勢調査にもとづいて、中心都市への通勤・通学人口の割合が1.5％以上の市町村で、かつ連接している場合、それを都市圏としている。ちなみに、中心市が東京特別区および政令指定都市が中心都市である場合を大都市圏、それ以外で、50万人以上の場合を都市圏と呼ばれている。また、金本・徳岡（2002）は中心都市への通勤率が10％以上で、中心都市におけるDID人口が5万人以上の都市圏を大都市雇用圏（Metropolitan Employment Area：MEA）と定義している。

一方、アメリカ合衆国では、大都市圏地域における定義名および定義内容が戦後から現在にかけて変わってきている。1949年では標準大都市圏（Standard Metropolitan Area：SMA）、1959年には標準大都市圏統計地域（Standard Metropolitan Statistical Area：SMSA）、1983年には大都市圏統計地域（Metropolitan Statistical Area：MSA）、1990年にはMSAを統合する形で大都市圏地域（Metropolitan Area：MA）と呼ばれている。2000年以降は、Core Based Statistical Area（CBSA）が導入され、これは少なくとも1つの都市化地域[1] または1つの都市クラスター[2] を含んでおり、Metropolitan Area（大都市

圏）または Micropolitan Area（小都市圏）のどちらかに含まれる形でデザインされている。ちなみに、大都市圏は少なくとも 50000 人を有する１つまたは１つ以上の都市化地域を含み、小都市圏は 10000 人から 50000 人の間の少なくとも１つの都市クラスターを含む。また、都市人口は都市化地域の人口と都市クラスターの人口との合計を示しており、国勢調査局によると 2000 年には合衆国の人口の約 79%が都市人口である。

ここでは、近接している円の大きさとしての人口規模に対して、これらの円の各中心部にまで影響している中央都市の都心部の大きさである見えざる都心部機能の割合を都市圏として定義する[3]。まず、図２から図５に見られるような中央都市としての都心部を除く３つ以上の同規模の円形都市で構成される都市システムが対象性を有する場合と図６および図７に見られるような非対象性を有する場合のそれぞれのケースにおいて、都市圏の定義値を導びく。ついで、ここでの円形都市はコンパクトシティ[4] であり、これにもとづいてわが国における都市圏の構造について考察する。

Ⅱ　幾何学からの都市圏の定義

1　対象性（等円形）都市システムにおけるベーシック都市圏の定義

⑴　人口規模からみた都市圏

図２では同質平野上の中心に都市機能を有する等規模の３つの単一中心都市 A、B、C が存在し、これらの都市が形成された後に円 G が都市圏の中心的都市機能の役割を有する中央都市（以下では都心部[5]）として成立すると、Soddy の定理から円 G や円 A、B、C をはじめこの都市システムを支えている見えざる円 J が導かれる。以後この円は「見えざる都心部機能または見えざる中心業務機能」と呼ばれる。したがって、この円こそ実際に都市圏を支える人口（厳密には昼間人口）または企業の大きさを示している。見方を変えると、いつの時点か分からないが、あるいはベーシックなものであるのか、円 G においては自

治体のみならず公共サービスや商業が集積しており、そこからそれらの機能が効率よく、かつ公平に行き届き、各都市間の境界地 x、y、z[6] にまで及んでいるのである。いずれにしても三角形 ABC の内接円 J と同等の見えざる都心部機能[7] が存在していることになる。さらに、その機能は長期においては各都市の都市的機能が集中している中心部（A、B、C）にまで均等に及ぶ可能性があり、その範囲は三角形 ABC の外接円 K となる。ところで、図２には、理解しやすいように互いに接しあう３つの等円が描かれているが、実際は都市としての円の大きさが異なることが多いため三角形の内心と外心の位置が一致していないことに注意を要する。この場合は、難しい定理などは使わなくても三角関数の定理だけで導かれる。ここで、中央都市または都心部にあたる円 G の半径およびその面積は、

$$r_1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)r=0.155r \quad \text{および} \quad r_1{}^2\pi=0.024r^2\pi$$

で表わされる。ただし、r_1 は円 G の半径を示す。

　また、短期の見えざる都心部機能は、

$$r_2=\frac{r}{\sqrt{3}} \quad \text{から} \quad r_2{}^2\pi=\frac{r^2}{3}\pi=0.333r^2\pi$$

で表わされる。ただし、r_2 は円 J の半径を示す。

　ちなみに、もし見えざる都心部機能を支えている企業[8] が G に集中しているとすると、（円 J の面積）/（円 G の面積）が 13.88 である[9]。したがって、この値は企業数と人口が比例しているとすると、G における企業密度か建物の平均的高さを示しおり、１企業１フロアーとすると約 14 階の建物が存在することになる。これは都市面積と人口が比例的なケースにおいて基本的な建物の高さを示しているように見える。

　また、長期の見えざる都心部機能である円 K の面積は、

$$r_3=\frac{2}{\sqrt{3}}r=1.155r \quad から \quad {r_3}^2\pi=\frac{4}{3}r^2\pi=1.333r^2\pi$$

である。ただし、r_3 は円 K の半径を示す。

　したがって、ここでの都市圏は、都市圏を構成する人口またはそれに比例する企業に対して、都心部および各都市の中心部までの広範囲に影響している円の大きさの割合と定義すると、その定義は、円 K の面積 /（円 A の面積＋円 B の面積＋円 C の面積）で表現される。

ここでは、

$$\frac{{r_3}^2\pi}{3r^2\pi}=\frac{1.333r^2\pi}{3r^2\pi}=0.444$$

であることから、全体の約 44％の人口または企業が実際に都心部にいることが都市圏の定義となる[10]。

　さらに、この定義にしたがって、計算された表 1 から 4 つの等円のケース（図 3 ）では 0.5、5 つの等円のケース（図 4 ）では 0.579、6 つの等円のケース（図 5 ）では 0.667 である。

　ちなみに、3 つの円 A、B、C に外接している円を都市圏とすると、

$$\frac{1.333r^2\pi}{(2.155r)^2\pi}=0.287$$

であることから、全体の約 29％の人口または企業が実際に都心部にいることが都市圏の定義となる。

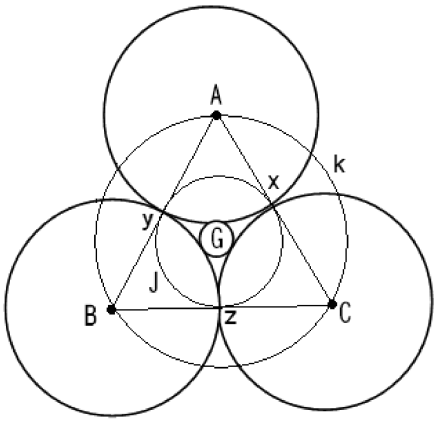

図２　３つの等円都市からなる都市圏

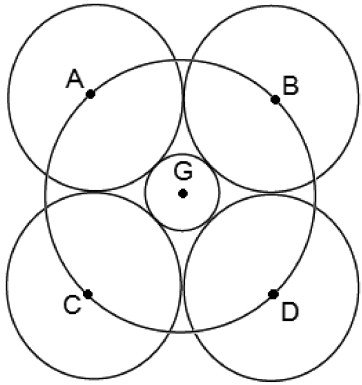

図３　４つの等円都市からなる都市圏

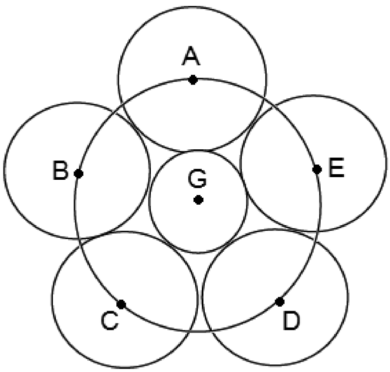

図４　５つの等円都市からなる都市圏

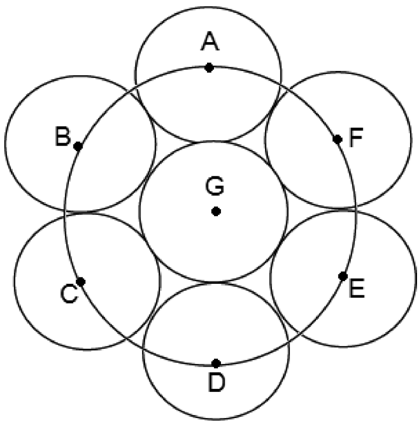

図５　６つの等円都市からなる都市圏

表１　等円都市数別都市圏定義数値

等円都市数	θ	cos θ	1/cos θ	$(1/\cos\theta)^{\wedge 2}$	都市圏定義数値
3	30°	0.866	1.155	1.334	0.445
4	45°	0.707	1.414	1.999	0.5
5	54°	0.588	1.701	2.893	0.579
6	60°	0.5	2	4	0.667
8	67.5°	0.383	2.611	6.817	0.852
9	70°	0.324	2.924	8.549	0.95
10	72°	0.309	3.236	10.472	1.047
12	75°	0.259	3.861	14.907	1.242
16	78.75°	0.195	5.128	26.296	1.644
18	80°	0.174	5.747	33.028	1.835

注）等円都市から成る都市圏の定義値が、１以上になることは現実にはありえないため、上表では９つの等円都市数までが適当と考えられる。

２　非対象性（非等規模）都市システムから成る都市圏の定義

⑴　人口規模からみた都市圏

図６から、同質平野上の中心に都市機能を有する３つの接し合う単一中心都市 A、B、C が存在し、これらの都市が形成された後に、円 u が都市圏の中心的都市機能の役割を有する中央都市（以下では都心部[11]）として成立すると、Soddy の定理から円 u や円 A、B、C をはじめ、この都市システムを支えている地理空間において見えない円 J が導かれる。この円こそこの系を支えている「見えざる都心部機能または見えざる中心業務機能」[12] と考えられる。したがって、この円は実際に都市圏を支える人口（厳密には昼間人口）、または企業の大きさを示していると言える。上記１同様に見方を変えると、いつの時点か分からないが、あるいはベーシックなものであるのか、円 u においては自治体のみならず公共サービスや商業が集積しており、そこからそれらの機能が各都市の規模に応じて、効率よく行き届き、各都市間の境界地 x、y、z[13] にまで及んでいるのである。いずれにしても三角形 ABC の内接円 j と同等の見えざる都

心部機能[14] が存在していることになる。さらに、その機能は長期においては各都市の都市的機能が集中している中心部にまで及ぶ可能性があり、その範囲は三角形 ABC の外接円 k となる。ただし、都心部機能のうち商業機能の中心は都市の規模に比例する市場の規模と交通費の節約を考慮して、まず円 j の中心 v に移動し、それから円 k の中心 w に移っていく可能性がある。これが２核心を有する都市圏のはじまりであるのかも知れない。ちなみに、v から w への移動距離はチャップル-オイラーの定理（付録⑸を参照）によって導かれる。

ここで重要なことは、都市圏の中央において創出する都市の大きさと見えざる円の大きさが Soddy の定理[15] およびランク・サイズモデルによって導かれるということである。ちなみに、都市 C の半径 r_1 を 100 とすると、都市 B の半径：r_2＝11.5、都市 A の半径：r_3＝3.2、都市 u の半径：r_4＝1.3、短期の見えざる都心部機能の半径：r＝5.7、長期の見えざる都心部機能の半径：R＝65.09 である。したがって、現実が短期の状態であり、支えている企業[16] が u に集中しているとすると、（円 j の面積）/（円 u の面積）が 19.22 である[17]。したがって、この値は企業数と人口が比例しているとすると、u における企業密度か建物の平均的高さを示しおり、1 企業 1 フロアーとすると、約 19 階の建物が存在することになる[18]。この建物の高さは、わが国の首都圏都心部における建物の平均的高さからすると、比較的近い値ではないかと考えられる。また、各都市の中心部にまで見えざる都心部機能が達成している長期の状態において、はじめて都市圏が成立するものと考えると、都市圏の定義は（円 k の面積）/（円 A の面積＋円 B の面積＋円 C の面積＋円 u の面積）で表わされる。これを計算すると、0.417 であり、面積と人口が比例しているとすると、都市圏人口における見えざる都心部機能に関わる人口の割合が約 42％であることが都市圏成立の条件と言えよう。

なお、図７から３つの円 A、B、C に外接する円を都市圏とする場合、その都市圏の半径は、付録⑷によって求められる。

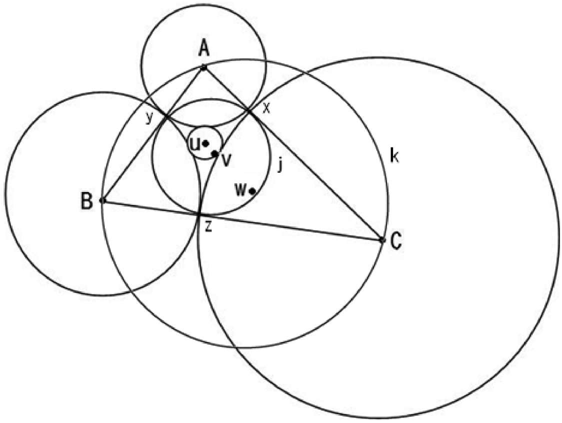

図６　中心都市に外接する３つの異なる円形都市からなる都市圏

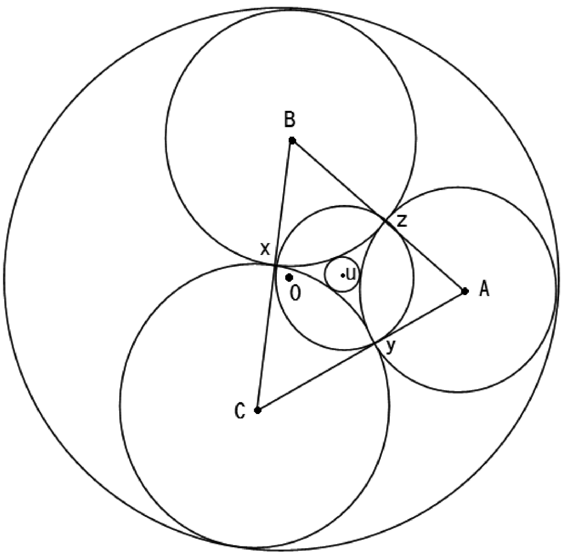

図７　中心都市に外接する３つの異なる円形都市からなる円形都市圏

Ⅲ　幾何的都市圏のわが国への応用

ここでは、円の大きさ、人口および都市の生産力がそれぞれ比例的であるために、中央都市都心部の大きさが周辺の都市の中心に及んでいる段階において都市圏が成立しているという観点から、「民力」にもとづいて、等円都市人口の合計をエリア人口として、見えざる都心部機能人口を中心市昼間人口として、都市圏の定義については、中心市昼間人口÷エリア人口で計算される。表２にはこれで計算された都市圏定義値が掲げられている。

都市圏のコンパクト化を図った場合の予想される都市圏の形状は、表１、Ⅱの２および表２の関係から、都市圏定義数値が0.42である弘前市都市圏および金沢市都市圏は３不等円都市圏に、またその定義数値が0.5である福井市都市圏は４等円都市圏に、それぞれ適合する。

表２　わが国における主要中心都市を有する都市圏定義数値

都市圏	エリア人口	中心市昼間人口	都市圏定義数値
甲　府	843477	231218	0.27
岐　阜	1363047	433077	0.32
徳　島	813336	296763	0.36
松　江	558911	205457	0.37
宇都宮	1318997	529965	0.4
八　戸	651346	257584	0.4
水　戸	750615	301951	0.4
金　沢	1174026	493849	0.42
弘　前	472856	200565	0.42
佐　賀	528896	230697	0.44
和歌山	858214	390753	0.46
熊　本	1451493	698089	0.48
郡　山	749118	359136	0.48
豊　橋	766769	364999	0.48
長　崎	967572	467889	0.48

松　本	526141	250457	0.48
山　形	577160	276846	0.48
仙　台	2263562	1098981	0.49
福　井	672358	338569	0.5
大　分	935731	473094	0.51
四日市	605360	313406	0.52
広　島	2209719	1174401	0.53
秋　田	647617	349635	0.54
姫　路	1008639	546303	0.54
神　戸	2792156	1547971	0.55
鳥　取	378113	209338	0.55
新　潟	1470455	826581	0.56
日　立	377047	211905	0.56
高　山	163627	98515	0.6
名古屋	4221031	2516196	0.6
浜　松	1339820	806370	0.6
長　野	647706	396153	0.61
函　館	496431	303878	0.61
福　岡	2596039	1571184	0.61
静　岡	1198757	741583	0.62
宮　崎	607173	376788	0.62
福　島	470961	302423	0.64
札　幌	2884522	1880863	0.65
松　山	653642	525208	0.8
平均値	1102883	579452	0.51

注）ここでのデータは、『CD 民力 2007』朝日新聞社における 2005 年の国勢調査にもとづいている。また、前橋・高崎エリアのように中心的都市が２つ存在するエリアや東京都市圏および大阪都市圏における地域エリアについては省略した。

Ⅳ　等楕円から成る都市圏の定義

1．３つの等楕円都市から成る都市圏定義

図９のケースにおける都市システムの定義式から、

$$r=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{3}}$$

で表わされる。ただし、r は３つの等楕円に外接する円の半径を示す。

また、楕円の長径を a、短径を b とすると（以下同様）、楕円の面積は $ab\pi$ であることから、都市圏の定義値は、

$$\frac{\left(b^2+\frac{a^2}{3}\right)\pi}{3ab\pi}=\frac{\left(b^2+\frac{a^2}{3}\right)}{3ab}$$

で示される。なお、図８では a および b の大きさに対しての都市圏の大きさがシュミレーションされている。

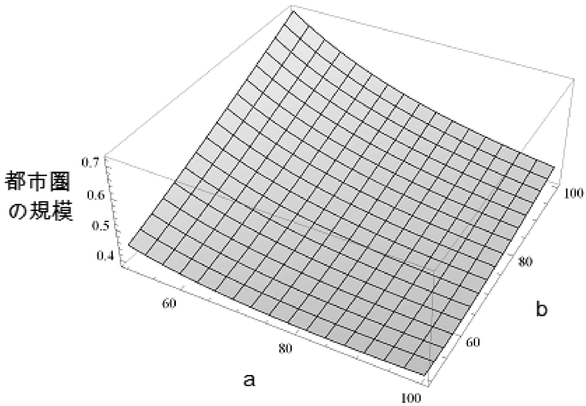

図８

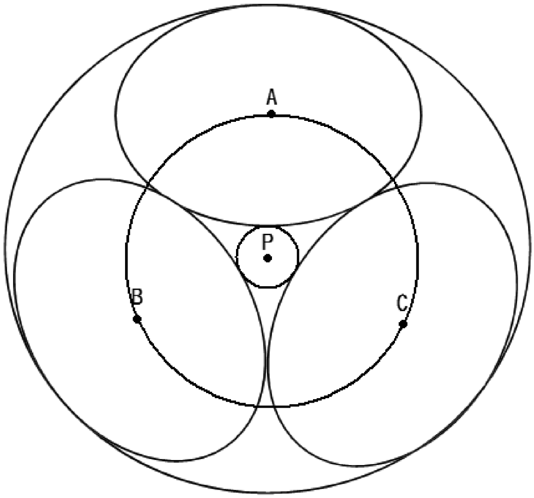

図９　３つの等楕円都市からなる円形都市圏

２．４つの等楕円都市から成る都市圏定義

図 10 における都市システムの定義式から、4 等楕円に外接している円（都市圏）の半径 R は、

$$R = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

で表わされる。

また、各楕円の中心を結ぶ円（長期的都心部機能）の半径 r は、

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

で表わされる。したがって、都市圏の定義値は、

$$\frac{r^2\pi}{4ab\pi} = \frac{r^2}{4ab} = \frac{a^2 + b^2}{4ab}$$

である。なお、図 11 では a および b の大きさに対しての都市圏の大きさがシュミレーションされている。

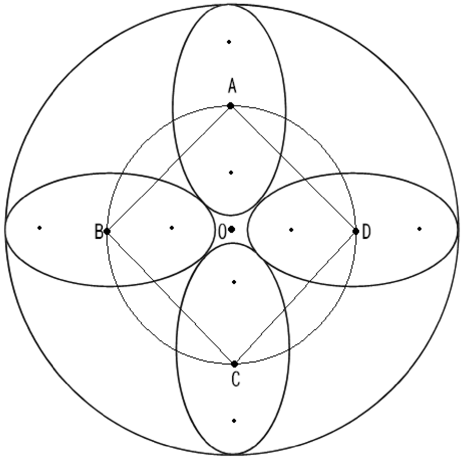

図 10

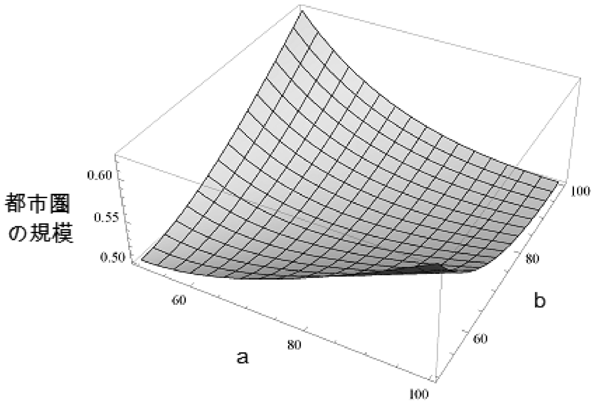

図 11

Ⅴ　まとめにかえて

ここで重要なことは、命題として、「対象性を有する都市システムにおいて、副都心は存在しない」ことが言える。これは、都心部を中心に境界地を通過する円と各周辺都市の中心を通過する円は、同じ中心を有するからである。この場合都市は最もコンパクトになる。

ここでは、まず円形のコンパクトシティの考え方にもとづいた都市圏の定義を試みた。そこでは、等円規模の都市に外接する中心機能がそれらの都市の中心を含む円となった時に、それらの系が都市圏として定義される。またこれらを計算すると、９の等円都市から成る系までが都市圏定義値として当てはまることが分かった。さらに、最近のわが国の主要都市に応用すると、コンパクトシティの計画的観点から、非３等円都市系の都市圏定義値にもとづくと、弘前市都市圏および金沢市都市圏が、３等円都市系のそれについては和歌山市都市圏および佐賀市都市圏などが、４等円都市系のそれについては仙台市都市圏および大分市都市圏などがそれぞれ近い値を示している。

付録　(1)　Soddy の定理と都心部 u の半径の導出

この定理は、図６の互いに外接する半径 r_1、r_2、r_3、r_4 の円 C、B、A、u において、つぎの式が成立することを示す。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{{r_4}^2}\right) \tag{6}$$

ただし、これは必要十分条件でないことに注意を要する。

ここで、都市の大きさとみなされる円の大きさ（半径）に対してランク・サイズの法則（(2) 式）が成立しているとすると、(6) は

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{2^{\alpha}}{r_1}+\frac{3^{\alpha}}{r_1}+\frac{4^{\alpha}}{r_1}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{4^{\alpha}}{{r_1}^2}+\frac{9^{\alpha}}{{r_1}^2}+\frac{16^{\alpha}}{{r_1}^2}\right) \tag{7}$$

で表され、これを整理すると

$$(1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+4^{\alpha})^2=2(1+4^{\alpha}+9^{\alpha}+16^{\alpha}) \tag{8}$$

が導かれる[19]。これを Maple で解くと、$\alpha=3.119$ が計算される[20]。ただし、この場合は r_1 は r_2 より大きい値であれば、どの値でも良いことになる。したがって、このことは(2)から基準となる第１ランクの最も大きな都市の大きさが都市のシステムの規模を決めていくことを示唆している。ここで都市 C の半径を $r_1=100$ とすると、

都市 B の半径：$r_2=\dfrac{100}{2^{3.119}}=11.5$、都市 A の半径：$r_3=\dfrac{100}{3^{3.119}}=3.2$

都市 u の半径：$r_4=\dfrac{100}{4^{3.119}}=1.3$

がそれぞれ推計される。ただし、これらの推計値は小数第２位で四捨五入されている

付録(2)　Soddy の定理２と短期的見えざる都心部機能

Soddy の２番目の定理は、図６の互いに外接する半径 r_1、r_2、r_3、r_4 の円 C、B、A、u において、つぎの式が成立することを示す。

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{2}{r} \tag{9}$$

ただし、r は△ABC の内接円 v の半径である。
ここで、この空間においてランク・サイズの法則が成り立っているとすると、(9) は

$$\frac{4^{\alpha}}{r_1}=\frac{1}{r_1}\left(1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\frac{2}{a}\right) \tag{10}$$

で表され、これより

$$4^{\alpha}=1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\frac{2}{a} \tag{11}$$

が導かれる。ただし、$r=ar_1$ である。

上記の Soddy の定理とランク・サイズモデルから $\alpha=3.119$ であり、これを(11) へ代入することによって、a が求められる。

$$a=\frac{2}{4^{\alpha}-1-2^{\alpha}-3^{\alpha}}=\frac{2}{35.02}=0.057$$

ここで、$r_1=100$ とすると、$r=5.7$ となる。

付録(3)　長期的見えざる都心部機能

図 6 における円 CBA の中心を結ぶ三角形の外接円の半径 R は、深川・ダン（1991、p. 9）から

$$R=\frac{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_3+r_1)}{4\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

で表わされる。ちなみに、これはヘロンの公式からも導くことができる。この式に Soddy の定理から求められた値を代入することによって、R＝64.8419 が求められる。これは、長期的中心地機能の大きさの半径を示すことになる。

付録(4)　Stewart の定理

図７において、３つの円に外接する円の半径は、Stewart の定理[21] から、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_5}\right)=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4} \tag{1}$$

が導かれる[22]。ただし、r_1：円 u の半径、r_2：円 A の半径、r_3：円 B の半径、r_4：円 C の半径、r_5：O の半径をそれぞれ示す。

付録(5)　チャップル-オイラーの定理（安藤［2006、pp. 78-79]）

この定理を用いると、図 12 から三角形に内接する円と外接する円の中心地間の距離 d は、

$$R^2-2Rr=d^2$$

で表される。ただし、三角形 ABC に外接している円 O の半径は R であり、三角形 ABC に内接している円 P の半径は r である。

この図は、ポンスレー[23] の不定命題（「円に内接し、かつ外接する円は無数に存在する」の例としてよく用いられている。（Wells［1991、pp. 183-184]）

また、この定理式がランクで示されるとすると、

$${R_n}^2+2R_nR_{n+1}={d_n}^2$$

で表される。ただし、R を R_n、r を R_{n+1} としている。さらに、この式がランク・サイズモデルに従っているものとすると、

$$\frac{{R_1}^2}{n^{2\alpha}}+\frac{2{R_1}^2}{n^{\alpha}(n+1)^{\alpha}}={d_n}^2$$

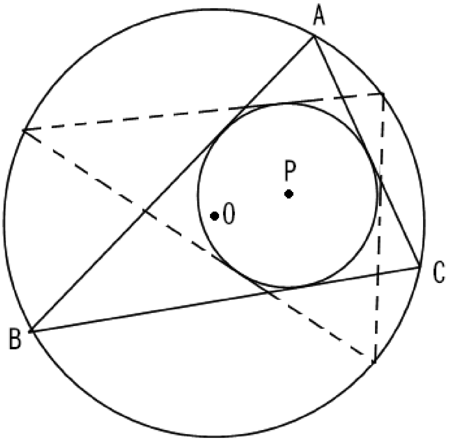

図 12

で表される。

注

1　これは、コアブロックのグループにおいて、エーカー当たり 1000 人、その周辺ブロックではエーカー当たり 500 人いて、集中居住ブロックは、少なくとも 50000 人を包含する。ちなみに、2000 年においてアメリカ合衆国では、464 の都市化地域があった。
2　これは、都市化地域のバージョンを下げたもので、地域クラスターを形成する人口は、2500 人から 50000 人である。このクラスターは 2000 年においてアメリカ合衆国では、3112 あった。
3　ちなみに、この定義の逆は、勢力指数と呼ばれている。
4　ここでのコンパクトシティとは、消費者の交通アクセスの公平性およびエネルギーの節約などを考慮して、都市の中心にショッピングセンターや公共サービスが集積されている円形都市を示す。
5　ここでの都心部は、一つの都市の都心部ではなく、都市圏に必要な多くの機能が集中している都心部であり、距離の効率性の観点からほぼ中央に位置している。例えば、円形とした場合の東京大都市圏における東京特別区のようなものである。
6　これらの境界地には、クリスタラーの交通原理によって一つの地区が形成されよう。
7　これは経済に限定するならば、市場圏ということに置き換えられるであろう。
8　ただし、単純化するために３つの円に囲まれた空白の部分には公共サービス事業などが

立地していると考えられよう。

9　ここで、円Gの半径は、Soddyの2番目の定理によって求められる。これについては、一松（2003、pp. 75-77）を参照せよ。

10　ここでの円と円の僅かな隙間は、都市共通機能としての公共空間を示している。

11　ここでの都心部は、一つの都市の都心部ではなく、都市圏に必要な多くの機能が集中している都心部であり、距離の効率性の観点からほぼ中央に位置している。例えば、東京大都市圏における東京特別区のようなものである。

12　ここでの機能は、行政、ビジネス、商業などの中心的役割を果たすすべての機能を示す。

13　注6同様に、これらの境界地には、クリスタラーの交通原理によって一つの地区が形成されよう。

14　これは経済に限定するならば、市場圏ということに置き換えられるであろう。

15　この定理については、付録⑴および⑵を参照せよ。

16　ただし、単純化するために3つの円に囲まれた空白の部分には公共サービス事業などが立地していると考えられよう。

17　ここで、円Gの半径は、Soddyの2番目の定理によって求められる。これについては、一松（2003、pp. 75-77）を参照せよ。

18　ただし、この階数は、Stewartの定理（付録⑷）にもとづいて計算された値とは異なることに注意されたい。

19　ここでは、第1ランクの都市の大きさを円の面積ではなく、円の半径をもって計算されているが、面積にしても⑻が導かれる。

20　ちなみに、神頭（2004、pp. 121-123）によると、わが国の大都市10の人口に対してランク・サイズモデルを適用すると、1970年から2000年にかけてαが0.8からほぼ1に近い値が推計されている。また、愛知県における35都市の住民基本台帳人口のデータ（2005年）をランク・サイズモデルに当てはめると、$\alpha=0.928$である。したがって、ここでの都市圏は現実と比較して、都市数が少ないものの人口または面積においてランク間の格差が大きい都市を有する都市圏を意味する。

21　この定理は、岩田（1978、p. 232]）によると「同じ円に内接する2つの外接する円の半径の逆数（曲率）の和が一定」と言うものである。

22　これについては、岩田（[1971、pp. 384-385]、[1978、p. 273]）および［1993b、p. 121]）を参照せよ。

23　ポンスレー（1788～1867）は、フランスのメッツ生まれで、モンジュの教えを受け双対の原理を発見したことで有名である。また、後に彼は射影幾何学に影響を与えている。

参考文献および引用文献

Dantzig, G. B. and T. L. Saaty（1973）*Compact City*, W. H. Freeman and Company（監訳─森口繁一『コンパクトシティ』日科技連出版社、1974）

Hollingdale, S.（1989）*Makers of Mathematics*, Pelican Books（岡部恒治監訳『数学を築いた

天才たち（上）、（下）』ブルーバックス、講談社、1998）
Howard, E.（1902）*Garden Cities of Tomorrow*, Orion Press, 1902（邦訳―長素連『明日の田園都市』鹿島出版会、1968）
McDonald, J. F.（1997）*Fundamentals of Urban Economics*, Prentice-Hall.
O'Sullivan, A.（1990）*Urban Economics*, McGraw-Hill.
Wells, D.（1991）*The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books Ltd（共訳―宮崎興二・藤井道彦・日置尋久・山口哲『不思議おもしろ幾何学辞典』朝倉書店、2002）
Yvonne et Rene Sortais（1987）*La Geometrie du Triangle*, Hermann, editeurs des sciences et des arts, Paris（邦訳―戸田アレクシ哲『なぜ初等幾何は美しいか―三角形幾何学―』東京出版、2002）
阿原一志『シンデレラで学ぶ平面幾何』シュプリンガー・フェアラーク、2004
安藤哲哉『三角形と円の幾何学』海鳴社、2006
一松　信『現代に活かす初等幾何入門』岩波書店、2003
岩田至康『幾何学大辞典１』槙書店、1971
岩田至康『幾何学大辞典２』槙書店、1974
岩田至康『幾何学大辞典３』槙書店、1976
岩田至康『幾何学大辞典４』槙書店、1978
岩田至康『幾何学大辞典５』槙書店、1980
岩田至康『幾何学大辞典６』槙書店、1982
岩田至康『幾何学大辞典（補巻Ⅰ）』槙書店、1993a
岩田至康『幾何学大辞典（補巻Ⅱ）』槙書店、1993b
海道清信『コンパクトシティ』学芸出版社、2001
海道清信『コンパクトシティの計画とデザイン』学芸出版社、2007
角本伸晃「富山市のコンパクトシティへの取り組み―人口減少下の都市政策に向けて―」（神頭広好・角本伸晃・麻生憲一・長橋透・藤井孝宗『北陸地域のまちづくり研究』愛知大学総合科学研究所叢書 30、2007 所収）
神頭広好「ランク・サイズモデルが意味するもの―観光地への応用―」『日本観光学会誌』第 43 号、2003
神頭広好『情報と観光の空間分析―ランク・サイズモデルと経済理論―』経営総合科学研究所叢書 25、2004a
神頭広好『増補版　都市と地域の立地論―立地モデルの理論と応用―』古今書院、2004b
神頭広好「第７章　平面幾何学からみた都市の立地システムと交通」（神頭広好・角本伸晃・麻生憲一・長橋透・藤井孝宗『北陸地域のまちづくり研究―富山市を対象にして―』愛知大学総合科学研究所叢書 30、2007a 所収）
神頭広好『都市、交通およびニュータウンの立地』愛知大学経営総合科学研究所叢書 31、2007b
神頭広好『円形都市を有する都市圏構造―平面幾何学とランク・サイズモデルの応用―』愛知経営論集、第 157 号、2008
神頭広好『都市の空間経済立地論―立地モデルの理論と応用―』古今書院、2009

小平邦彦『幾何への誘い』岩波書店、2000
関根章道『人に話したくなる数学おもしろ定理』技術評論者、2006
寺阪英孝編『現代数学辞典』講談社、1977
難波　誠『平面図形の幾何学』現代数学社、2008
野崎昭弘・何森仁・伊藤潤一・小澤健一『図形・空間の意味がわかる』ベレ出版、2003
矢野健太郎『幾何の有名な定理』共立出版、1981
山本恭逸編『コンパクトシティ―青森市の挑戦―』ぎょうせい、2006
吉田克明・中野潤『直感でわかるおもしろ図形・幾何』技術評論社、2007

〔論　説〕

Inflation Targeting and the Role of Exchange Rate: The Case of the Czech Republic

Yutaka Kurihara

Abstract

This paper analyzes the recent conduct of monetary and exchange rate policies in Czech Republic. The Czech experience with inflation targeting seems to have been satisfactory. The authorities have succeeded in maintaining a stable and moderate rate of inflation. Despite the warnings of skeptics, technical problems in the application of inflation targeting have not interfered with the operation of this regime. The paper shows that the exchange rate system, regardless of free-floating rhetoric, does not heavily influence the conduct of monetary policy in the Czech Republic. Also, it matters not merely in that it is useful for forecasting inflation rate.

Introduction

Inflation targeting entails an institutional commitment to price stability as the prime goal of monetary policy, giving the central bank accountability relative to the attainment of monetary policy goals, public announcement of targets for inflation, and a policy of communicating to the markets the rationale for the decisions made by the central banks. The independence of central banks is needed to give the monetary authorities the leeway necessary to commit to stability. On the other hand, central banks are responsible for the conduct of monetary policy and its outcomes. Also, sound, stable fiscal policy and a stable banking system are needed to avoid problems that would prevent the central bank from subordinating other goals to the objective of price stability or undermining the independence of the central banks. Central banks sometimes need to avoid the government intervention; the conduct of inflation targeting makes central banks possible. This multidimensional nature of this definition explains why there is no consensus about which practice is inflation targeting especially for emerging markets.

Many obstacles to inflation targeting have raised questions regarding its use in emerging markets. In general, changes in import prices due to movements in the exchange rate are quickly passed to domestic market prices in emerging markets (Calvo and Reinhart, 2000). With this type of high pass-through, a change in the exchange rate has a large short-run impact on inflation and a small short-run impact on output not only emerging markets but also in developed markets. The exchange rate should be adjusted to offset the effects so as not to harm the domestic markets. Foreign deflation, for example, will induce an inflation-targeting central bank to expand the money supply and allow the currency to depreciate, whereas an inflationary shock will induce the opposite reaction.[1] Most developing countries have recently experienced the former case.

The difficulty of forecasting inflation may be an obstacle to inflation targeting. It is not realistic to hope to forecast inflation with the requisite reliability if the country is still in the process of bringing down inflation from high levels, reforming the tax and public spending systems, and restructuring the private sector. Credibility problems sometimes make inflation targeting less attractive. They mean more volatility and less flexible policy conduct.

Theoretical arguments about the need for a nominal anchor, inflation targeting, may help to justify a move toward inflation targeting, but it is important to know how well this approach has worked in actual application. This paper is structured as follows. Section 1 reviews the monetary policy of the Czech Republic. Section 2 presents one theoretical model for empirical analysis. Section 3 shows the results and analyzes them. Section 4 analyzes the role of exchange rate. Finally, this paper ends with a summary.

1. Inflation Targeting in the Czech Republic

The Czech Republic is one of two successor states of Czechoslovakia, the other being Slovakia. The Czech Republic entered 1993 as a newly independent country that still shared a monetary union with Slovakia. This arrangement rapidly proved to be unsustainable and the union was dissolved in 1993. Since then, the Czech Republic has conducted its own independent economic and monetary policies.

The heritage of Czechoslovakia was overall macroeconomic stability. The country had been a bulwark of fiscal and monetary prudence during communism and the early transition policies confirmed this trend (Drabek et al., 1994). Restrictive monetary and fiscal policies accompanied the start of reforms in January 1991, ensuring that inflation fell after the initial jump caused by price liberalization. After falling to approximately 10% in 1992, inflation rose to about 20% in 1993 due to the introduction of value-added tax

(VAT) in the Czech Republic in January 1993.

The years 1993 to 1997 can generally be reckoned as a period of prosperity. The economy recovered greatly and growth rates were quite high. Growth was accompanied by high employment rates without parallel in other countries. Inflation stabilized at around 10%. In the second half of 1995, the Czech Republic liberalized the current account of the balance of payments. As a result of relatively high interest rates, a stable nominal exchange rate, and low perceived political risk, the economy of the Czech Republic began to attract large amounts of both short-term and long-term capital inflows in 1994 and 1995. However, reflecting sluggish export growth and strong increases in imports, economic growth began to slow down in 1995 to 1996. Prompted by a combination of a major currency crisis in Asia and some European countries and a recession, in 1997, the government passed an austerity package that contained expenditure cuts, other measures to dampen domestic demand, and medium-term institutional and structural measures to stimulate the supply side of the Czech economy.

By early in 2000, the economy emerged from the recession. The new government conducted a massive clean-up and privatization of major banks, which led to a revival in lending activity. Fiscal policy was largely relaxed to pay the costs of the banking restructuring and to stimulate demand by investment in infrastructure and significant increases in pay for public employees. Unemployment was stabilized and inflation remained low and stable (Beblavy, 2007).

At the beginning of the transition, the Czech Republic policymakers had to institute a monetary policy framework that would take advantage of sound economic fundamentals. The policy response was a fixed exchange rate as the intermediate target of monetary policy complemented by a monetary target.

The central bank also announced inflation targets in terms of the so-called headline consumer price index; however, the exchange rate peg remained the nominal anchor.

The policy irrelevance of monetary targeting in the environment of high and unstable capital inflows was one of the reasons that the Czech central bank switched to direct inflation targeting after the exchange rate crisis of 1997. In 1998, the central bank argued that monetary targeting had a problem caused by a lack of predictable relationship between monetary aggregates and inflation. The Czech national bank set a target for net inflation as the final target in 1998.

2. Theoretical Analysis

One way to infer the importance of inflation, the real economy, and the exchange rate in the policy decisions of the Czech National Bank is to estimate an extended Taylor Rule.[2] Assume that the call rate partially adjusts to the target according to the function:

$$r_t = (1 - \rho) r_t^* + \rho r_{t-1} + v_t \tag{1}$$

where r is the call rate, r_t^* is the target rate for it, and v is a random shock. The coefficient ρ captures the degree of interest rate smoothing practiced by the central bank.

r_t^* is assumed as follows:

$$r_t^* = r_t^{**} + \beta\,(E[\pi_{t+n} | \Omega_t - \pi^*] + \gamma E[\text{output gap}_t | \Omega_t] + \eta\,[z_t | \Omega_t] \tag{2}$$

where r_t^{**} is the long-run equilibrium nominal interest rates, π_{t+n} is inflation between period t + n and period t, and z is another variable that may influence the reaction of the central bank. Combining (1) and (2):

$$r^{t} = (1 - \rho)[\alpha + \beta\pi_{t+n} + \gamma \text{ output gap}_t + \eta z_t] + \rho r_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3}$$

where $\alpha = (r_t^{**} - \beta\pi^{*})$, and $\varepsilon_t = (1 - \rho)[\beta(\pi_{t+n} - E[\text{output gap}_t | \Omega_t]) + (z_t - E[z_t | \Omega_t]) + v_t$

Let u_t be a vector of variables included in the central bank's information set at the time it sets the interest rate that are orthogonal to ε.

$$E[\varepsilon_t | u_t] = 0 \tag{4}$$

3. Empirical Analysis

Equation (4) entails the orthogonality conditions that we exploit to estimate the unknown parameters via GMM. I use lags 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 12 of the overnight call rate based on Eichengreen (2008), the index of industrial production, the inflation rate, and the lagged rate of real exchange rate depreciation as the elements of the central bank's information set. The sample period is 1998 to 2007.

An important step is to estimate the output gap. Many methods may be employed for this purpose. The time series for industrial production is transformed into an output gap series in two ways following Eichengreen (2008). One is to use the two-sided linear Hodrick-Prescott filter and the other is to use a linear trend. The results are shown in Table 1.

The results show a good fit for actual movements in the call rate. The first two equations show that the call rate rises along with inflation. The call rate also rises as actual output increases relative to capacity. The lagged dependent variable is significant and large. However, although the presence

Table 1 GMM Estimates: Forward-Looking Inflation

equation	alpha	beta	gamma	rho	zeta	gap
1	1.112	0.713	1.182	0.997		Hodrick=Prescott
	(0.907)	(0.303)	(0.162)	(0.003)		
2	−0.778	1.413	0.434	0.996		Linear trend
	(0.765)	(0.207)	(0.034)	(0.004)		
3	3.123	0.450	0.132	0.935	0.123	Hodrick=Prescott
	(0.884)	(0.336)	(0.105)	(0.005)	(0.015)	
4	−0.065	1.325	0.424	0.994	0.055	Linear trend
	(0.614)	(0.297)	(0.037)	(0.004)	(0.010)	

Note. Data in parentheses are adjusted standard errors.

of the lagged dependent variable explains the success of these equations in following trends in the call rate, the other variables still appear to have a role in determining fluctuations.

The key result is that the rate of change in the real exchange rate also influences the setting of the policy instrument.[3] When the real exchange rate depreciates, there is a tendency for the Czech National Bank to raise the call rate. The addition of the rate of currency depreciation reduces the magnitude of the other coefficients but does not change the results. The Czech National Bank cares about the movements of the real exchange rate above and beyond its use in forecasting future inflation. The distinction between forward-looking and backward-looking is sometimes important.

It is interesting to note that the substitution of backward-looking behavior for forward-looking behavior produces a negative coefficient on the excess of actual output over capacity output. Estimates of monetary policy reaction functions that are framed in terms of backward-looking price movements can

Table 2　GMM Estimates: Backward-Looking Inflation

equation	alpha	beta	gamma	rho	zeta	gap
1	−0.505	1.314	1.312	0.994		Hodrick=Prescott
	(0.512)	(0.199)	(0.155)	(0.004)		
2	1.833	0.398	0.499	0.995		Linear trend
	(0.324)	(0.044)	(0.043)	(0.003)		
3	5.018	−0.410	1.108	0.937	0.119	Hodrick=Prescott
	(0.354)	(0.099)	(0.112)	(0.006)	(0.013)	
4	4.1818	−0.298	0.395	0.993	0.148	Linear trend
	(0.2018)	(0.095)	(0.035)	(0.005)	(0.007)	

Note. Data in parentheses are adjusted standard errors.

be seriously misleading (Eichengreen, 2008).

The differences in the two sets of estimates is consistent with the assumption that the Czech National Bank looks forward rather than backward when it formulates monetary policy.

4. The Role of the Exchange Rate

The adoption of inflation targeting as an economy's monetary policy framework does not guarantee exchange rate stability and does not eliminate the potential for wide swings in exchange rate. Some advocates of inflation targeting take the position that the only exchange rate regime that is fully compatible with an inflation-targeting framework for the conduct of monetary policy is essentially free floating. At the most basic level, the choice of exchange rate regime, or the weight placed on changes in the exchange rate in the central bank's reaction function, should be a function of a country's economic development strategy. The Czech Republic has been committed to a strategy of export-led growth, in which it keeps the exchange rate stable at a competitive level. A strategy of keeping the exchange rate from appreciating and keeping interest rates low to confer additional resources into the production of exports — or, more generally, into the production of those goods for which the scope for productivity improvement is greatest — works less well in a deregulated financial environment.

The other reason that the Czech policymakers may be reluctant to move to greater exchange rate fluctuation is the worry that exchange rate stability is important for economic growth. The main reason is that it influences the bond markets. Bonds markets are very important for the economy and are related to interest rates. However, there is little evidence that greater exchange rate variability is a significant implement for bond market development (Eichengreen, 2008). The analysis of interest rates instead of exchange rates is sometimes important as countries pursue similar interest rate policies. The Czech Republic is not an exception. However, this paper omits this view.

5. Conclusions

The Czech experience with inflation targeting has been satisfactory. The authorities have succeeded in maintaining a stable and moderate rate of inflation. The technical problems suggested by skeptics of the application of inflation targeting have not interfered with the operation of this regime. This situation also suggests that the Czech National Bank cares about the real exchange rate as it has direct implications for the future course of inflation. Reasons such as the balance of investment traded and non-traded goods sectors impact implications for financial stability. Real exchange rates are very important and are related to monetary policy.

Problems exist in judging whether or not the framework of inflation targeting has been successful from this analysis. Targeting should restrain inflation in the long run. Also, a strong commitment to transparency should be guaranteed. These aspects have played important roles in the policies of targeting countries. Furthermore, the Czech Republic has conducted an overall package of reforms that has promoted and sustained economic growth and modernization. Inflation targeting seems to be a useful strategy for the conduct of monetary policy; however, further research is needed to study these issues more.

Notes

1. Anecdotal evidence suggests that this is the case for Brazil and Mexico. See Mishkin and Savastano (2000).
2. I follow the approach of Clarida, Gali, and Gertler (1998).
3. The result is similar to Corbo (2000).

References

Beblavy, M. (2007), Monetary Policy in Central Europe, Routledge: London.

Calvo, G. and C. Reinhart (2000), "Fear of Floating," NBER Working Paper 7993.

Clarida R., J. Gali, and M. Gertler (1998), "Monetary Policy Rule in Practice: Some International Evidence," European Economic Review 46 (1), 1033-1068.

Drabek, Z., K. Janacek, and K. Tuma (1994), "Inflation in the Czech and Slovak Republics," Journal of Comparative Economics 18 (2), 146-174.

Eichengreen, B. (2008), "The Role of the Exchange Rate in Inflation targeting: A Case Study of Korea" in D. T. Bentley and E. P. Nelson (Eds.), Inflation Roles, Targeting and Dynamics, Nova Science: New York.

Mishkin, F. and M. Savastano (2000), "Monetary Policy Strategies for Latin America," NBER Working Paper 7617.

〔論　説〕

資力喪失状態の立証論
――債務の免除に伴う贈与認定等の適用を前提――

加　藤　義　幸

目　　次

1　はじめに

2007年アメリカのサブプライム問題を起因とし2008年にはビックスリー（GM、フォード、クライスラーの各自動車会社）が倒産の危機に瀕し、大恐慌

が始まり、経済が大混乱しつつあり、我が国でもその影響により倒産・破産、経営の行き詰まりが多発し、この破産者や経営危機に陥った者に親族が資金援助や経済的利益を供する事例が発生している。本論文は、このような事態に対して相続税法（以下「法」という）がどのような対処法があり課税関係はどうなっているかを検討することが目的である。

そこで本論では、まず、①債務免除や経済的利益の供与がどのように実施され、このような行為に対して税法がどう適用されるのか。つぎに、②この場合に課税されるのか、課税されないのか。③もし課税されないとした場合に、どのような事例か、④課税されないために、どのようの資料が必要かを検討するものである。

親族間の支援は民法の贈与契約（典型契約の代表、民法549条）とみなされる場合とその他の例があるが、相続税法では取引または行為について、民法の典型的な契約以外の経済的支援について、一定の条件の下で、みなし贈与（法７条〜法９条）となる取扱いが定められている。

例えば、法８条は、債務免除を受けた場合のみなし贈与の一般規定があり、対価を支払わずに、また著しい低い価額の対価で債務の免除・引受・弁済による利益を受けた場合には贈与とみなされる旨[1] がある。

この「みなし贈与財産」に課税をすることの制定趣旨は、相続財産に関するみなし財産（生命保険金等：法３①一、退職手当金：法３①二、生命保険契約に関する権利：法３①三、みなし財産：法３等）と同様、法律的には贈与（相続の場合は、相続または遺贈）によって財産を取得したとはいえないが、贈与によって取得したと実質的に同様な経済的利益があるので、課税の公平性の要請から贈与税の課税対象となる財産または権利（経済的利益）に含めることとしたものである[2]。

しかしながら、みなし贈与とされる行為であっても、担税力から見てその利益を受けた者が資力喪失状態の場合には、みなし規定により課税関係を成立させることは相当でない場合がある。例えば、資金的に、皆無に近いが、父親に

保証人となり、銀行から借入金し、これを事業資金に事業を始める。しかしながら業績が振るわなく失敗した場合、父親が息子の借金の肩代わり、又は債務の返済を履行（保証人としてではなく本人に替わって返済）することがある。このような場合、税法では父親の息子への資金援助（贈与）と認識される。この行為は贈与税の非課税規定（法 21 条の３二号　扶養義務者間の生活費の非課税）や所得税の非課税（所得税法９条、14 号学費の支援や扶養義務者間の生活費の非課税）とはならないが、特例として課税から除外する規定がある。

そこで、①このような事例が発生する経済状態の分析、②債務の免除等を受けても贈与の認定されない場合の法的検討、③この場合の「資力喪失状態」とはいかなる状態をいうか、④具体的事例を判例から見て「どのような状態」をいうか、⑤この状態をどのように立証すればいいのかについて、否認事例・是認事例を通じて検証し、⑥このような事例の問題点や対応について事例を検討していくこととする。

具体的事例については、贈与税に関する公開された判例・裁決は無い。なぜ公開されていないかは不明であるが、おそらくその理由は受贈者には元々資力がないのであまり問題とならないか、事案としてはあっても公開の対象とならないかは定かでない。主要な問題点である「資力を喪失した状態」を検討するためには、贈与税事件以外の事例（所得税、法人税等）を参考に「資力を喪失した状態」について見ることとする。

２　現下の経済状態と問題意識

平成３年のバブル崩壊により平成９年から平成 15 年にかけて事業所の倒産が多発し、その後は倒産件数、負債総額は減少傾向にあったものの、平成 18 年より倒産件数が増加に転じて、20 年では件数、負債総額とも前年に比較して大幅に増加している[3]。

一方、個人の倒産は平成 15 年をピークに減少傾向にあるものの平成９年以

前の水準には戻っていない（自己破産統計＝最高裁判所[4] による）[5]。

このような昨今の経済状況をふまえると「倒産または破産[6]」に伴う税務問題として「債務免除に伴う税務」が重要な問題である。この債務免除に関する規定は法人税にあっては法人税法22条３項三号[7]、同法59条等、所得税にあっては所得税法９条一項十号、所得税法施行令26条、所得税法64条２項に定められている。

贈与税については、①特殊関係者間（扶養義務者からの債務免除）に関する規定（法７条～法９条）と②その他者（法８条）に分けて論ずることができる。

３　贈与税の概要

⑴　民法上の贈与契約

贈与とは、民法上の契約であり、反対給付を伴わない契約で「贈与者が自己の財産を無償で相手方（受像者）に与える意思を表示し、相手方がそれを受諾することによって成立する[8]」無償・片務契約であるとされ、契約は書面による契約（民法550条）と口頭による契約があり、口頭の場合、実際に実行されることによりその効力が認められ取消ができなくなる（同法550条但書）。

⑵　贈与税の意義

相続税法に贈与税が創設された趣旨は、贈与税が相続税の補完税である[9] といわれる所以である。相続税が被相続人の死亡を原因として課税されるが、相続開始までに被相続人に蓄積された財産を、相続人に事前に贈与することにより相続税の軽減もしくは排除が可能となる。この生前の贈与による相続税の免除を防止する目的（早期相続財産の移動の防止策）で創設された。また、この防止策として贈与が課税することとなったのは最近である[10]。

贈与税の課税対象となる財産は、本来財産（法１条の４）である「財産」とみなし財産（法４条から法９条）とがある。特に、みなし財産については①信

託に関するもの（法４条)、②生命保険金（法５条)、③定期金（法６条)、④著しい低額譲渡（法７条)、⑤債務免除による利益（法８条)、⑥その他の利益（法９条）の財産が法定されている。贈与税の財産も相続税の対象となる財産区分に準じて、本来財産とみなし財産がある。

このように贈与の対象となる財産については、一般的に本来財産と前述の「みなし財産」とがあり、みなし財産の範囲は法９条の包括的規定があることによりかなり広い範囲が対象となっている。法９条では受贈者のことが規定されているが、贈主である贈与者の範囲についての定めがないので、いわゆる親族等以外の者からの財産取得についても課税の対象となる。

このことは、法７条、法８条についても同様である。個人からの受贈益や法人からの受贈益等が対象となるが、贈与税の非課税（法 21 条の３、法 21 条の４）により非課税とされるもの以外は、無償で財産や経済的利益を受けた場合には、贈与税の課税対象となることとなる。

しかし、法人[11] からの贈与は法 21 条の４、第一号の規定により非課税とされるため、法７条ないし法９条の贈与者は、「個人」からの贈与が対象であると解される。また、この個人の範囲は、相続税上の納税義務者（法１条の３一号、二号、三号)、贈与税上の納税義務者（法１条の４一号、二号、三号）の制限の区分による納税者であるかどうかを問わないこととなる。

ところで、受贈者が事業等で失敗し、金融機関の借金の返済ができないので、①代わりに返済をした場合や②貸付けた金銭等が倒産により返済が不可能となったので、債務を免責、放棄することがある。

こんな時、借入の肩代わりを受け、その債務の弁済が不要になった者や債務の免除を受けた者は、前述の金銭等を受贈し、経済的利益（債務免除）を受けたこととなるので当然に贈与税の課税対象となる。しかし、上記の２事例の場合の場合に課税できるのかどうか問題がある。例えば、課税したとしても、当該納税者には納税資金がなく、結果、法 34 条④により、贈与者が連帯納税義務者となり、贈与者が肩代わりして、納税をすることとなる。このようなことは

国民感情から見て相当ではないので、免除する制度が制定されている。以下この免除制度に関する見てみよう。

その前に、法７条から法９条の「みなし贈与」について見てみる。

(3) みなし贈与

① 低額譲渡とみなし譲渡（法７条）

時価に比較して著しく低い価額[12] で財産の譲渡を受けた場合は、当該財産の譲渡があった時、当該財産の譲渡を受けた者が、当該対価と当該譲渡があった時の時価との差額に相当する金額を、当該財産を譲渡した者から贈与に因り取得したものとみなす。これは、時価に比較して、「著しい低い価額」の場合に、この規定が発動される。

② 無償または低額対価の債務免除（法８条）

対価を支払わないで、または著しく低い価額の対価で債務の免除、引受または第三者のためにする債務の弁済に因る利益を受けた場合においては、当該債務の免除、引受または弁済があった時、当該債務の免除、引受または弁済に因る利益を受けた者が、当該債務の免除、引受または弁済に係る債務の金額に相当する金額、対価の支払があった場合は、その価額を控除した金額、を当該債務の免除、引受または弁済をした者から贈与に因り取得したものとみなす。

③ その他の経済的利益のみなし贈与（法９条）

信託によるみなし贈与、生命保険契約のみなし贈与、定期金契約のみなし贈与、低額譲渡のみなし贈与、債務免除等のみなし贈与以外の行為で、対価を支払わないでまたは著しく低い価額の対価で利益を受けた場合、当該利益を受けた時、当該利益を受けた者が、当該利益を受けた時における当該利益の価額に相当する金額を、当該利益を与えた者から贈与に因り取得したものとみなす。なお、対価の支払があった場合には、支払対価を控除した金額がみなし贈与となる。

4　資力を喪失した者が受ける贈与税

⑴　概　要

個人から受けた贈与で、受贈者が資力を喪失した者に該当する場合、贈与税の負担が免除される（法７条～法９条）（以下「免除規定」という）。この規定が適用できる贈与のパターンは、①著しく低い価額で譲渡を受けた財産、②債務免除、③その他の経済的利益に区分できる。①、③の例は、「扶養義務者からの贈与」であり、②の例の債務免除は、贈与者と受贈者との人的関係の制限はなく、誰でも適用ができる（下図参照）。

資力喪失した者と免除関係

贈与資産	受贈者の区分		条文（法）
	扶養義務者からの受贈者	その他の者	
①著しく低い価額で譲渡を受けた財産	○	×	７条
②債務免除	○	○	８条
③その他の経済的利益	○	×	９条

○＝適用可、×＝適用否

資力の喪失者に対し、課税をしない規定は所得税法９条（非課税規定）① 10号「資力を喪失して債務を弁済することが著しく困難である場合における国税通則法第２条第十号（定義）に規定する強制換価手続による資産の譲渡による所得その他これに類するものとして政令で定める所得（第 33 条第２項第一号（譲渡所得に含まれない所得）の規定に該当するものを除く。)」による例や同法の 64 条（資産の譲渡代金が回収不能となった場合等の所得計算の特例）に準ずる扱いである。

結局のところ、受贈者課税である贈与税の納税義務を課しても、納税ができ

ないこととなるので、課税自身をしないとする法理である。

しかしながら、相続税や贈与税では、法 34 条により、財産を贈与した者は、当該贈与により財産を取得した者の当該財産を取得した年分の贈与税額に当該財産の価額が当該贈与税の課税価格に算入された財産の価額のうちに占める割合を乗じて算出した金額として政令で定める金額に相当する贈与税について、当該財産の価額に相当する金額を限度として、連帯納付の責めに任ずる。こととなり、資金支援をした親族が支援をした額について贈与とみなされると、納税義務者である受贈者の税額を連帯納税義務により負担することとなる。支援の額が税引き後となり、社会の一般的常識からいってこれに課税し、その税負担を贈与者に負担をさせることはなじまないこととなり非課税とされている。

⑵　著しく低額譲渡のみなし贈与と除外規定

著しく低額譲渡のみなし贈与は、⑴低額譲渡と⑵著しく低額の譲渡を想定し、後者の著しく低額により譲渡をした場合に時価（相続税評価）と譲渡価額との差額に贈与税の課税[13] をする。同条の但し書きにおいて、「当該財産の譲渡が、その譲渡を受ける者が資力を喪失して債務を弁済することが困難である場合において、その者の扶養義務者から当該債務の弁済に充てるためになされたものであるときは、その贈与または遺贈により取得したものとみなされた金額のうちその債務を弁済することが困難である部分の金額については、この限りでない」（法 7 条但書）との免除規定がある。

譲渡を受けた者が著しく低額で譲受けた場合について、その著しく低額で取得した資産の使途につい制限かあるのか否かについては、同条からは、制限がないので、資力を喪失した状態であれば適用ができることとなる。この点では所得税法 64 条とは異なる。所得税法 64 条の保証債務の履行による譲渡の免除規定は、保証債務の履行のために使途が制限されているので、譲渡をしたが債務の弁済に充てなかった場合は、免除規定の適用（所得税法 64 条）ができないとされた事例[14] がある点とは異なる。

法第７条の免除規定の要件は①著しく低額により資産の譲渡を受けた者が、②資力を喪失し債務を弁済することが困難であること、③贈与者がその者の扶養義務者であること、④債務を弁済することが困難である部分であり、この要件に該当すると贈与税が免除となる。所得税の保証債務の履行に伴う譲渡では、①譲渡者が主たる債務者に代わり債権者に弁済することであり、②譲渡者が直接債務を弁済することが条件である。

が、贈与税では、法８条、法９条も同様に、債務の弁済が困難な範囲に免税規定が作動するとあるので、低額譲渡を受けた資産でもって直接弁済をしたかどうかは問われないこととなる。法第７条の規定でも、資産が受贈者に著しく低額で移転することを想定して定めており、取得した資産が債務の弁済に充てられるための資金となるかは問われていない。

ここでの「資力喪失の状態」は、法８条、法９条と同様の規定であるので、次項で検討する。

⑶　扶養義務者の関係とは

扶養義務者の関係とは、法１条の２一の定義により「配偶者及び民法第 877 条（扶養義務者）に規定する親族」をいい、「直系血族及び兄弟姉妹は、互いに扶養をする義務」（民法 877 条①）があり、裁判所の審判により「三親等以内の親族」（同法②）も含まれる。民法上配偶者や直系血族・兄弟姉妹はその親族関係を有することがお互いに生活を扶助することを定め、ここでの扶養とはある人の生活を維持するためにこれと一定の親族的身分関係のあるものからなされる経済的給付を意味する[15]。このよう関係は、一定の近親者による事実上の家族共同生活や困窮したときの親族相互扶助が大部分の場合に愛情や習俗によっておこなわれているとき[16]、社会事実として承認され、このような生活関係の実現が望まれるといわれている。

したがって、通達（相基通１の 2-1）では、法的に家裁での審判がない場合でもその範囲を広く解するが、「生計を一にする」ことを条件に認めることとする

とある。

⑷　債務免除のみなし贈与と除外規定

債務免除のみなし贈与については「対価を支払わないで、または著しく低い価額の対価で債務の免除、引受または第三者のためにする債務の弁済による利益を受けた場合においては」その受けた債務免除の利益をみなし贈与として課税する。ここでの但し書は、①一般受贈者の免除と②扶養親族者の免除規定である。いずれも「債務者が資力を喪失して債務を弁済することが困難である場合において、当該債務の全部又は一部の免除を受けたとき」、「その債務を弁済することが困難である部分の金額については、この限りでない」（法８条）、とみなし贈与の適用除外が規定されている。

⑸　その他の経済的利益のみなし贈与と除外規定

その他の経済的利益のみなし贈与は、対価を支払わないで、または著しく低い価額の対価で利益を受けた場合においては、当該利益を受けた時において、当該利益を受けた者が、当該利益を受けた時における当該利益の価額に相当する金額を、当該利益を受けさせた者から贈与により取得したものとみなす（法９条）とあり、資産の著しい低額の譲受け（法７条）、債務免除（法８条）以外の経済的利益の享受を受けた場合に「みなし贈与」が生ずることを定めたものである。

また、但し書きで法７条と同じ免除規定があり受贈者が資力喪失し、債務の弁済ができない時に、扶養義務者間の経済的利益のみなし贈与を適用しないこととしている。

５　資力を喪失した状態

みなし贈与においては扶養義務者間の免除規定と一般者の免除規定が制度化

されているが、いずれの免除制度も要件は①受贈者が資力を喪失ししていること、②債務がありこの債務の弁済が困難であること、③債務の弁済が困難な額が確定できていることが課税除外となる。

そこで、資力を喪失している状態はとはどのような状態をさすのかについて、受贈者を⑴事業者、⑵サラリーマン（会社経営者を含む)、⑶その他の者の事例に区分し検討をする。なお、これらの事例は、相続税の事例ではないが、資力を喪失した状態を説明するのに参考となると判断し検討をするものである。

⑴　事業者の場合

事例１[17]

個人事業者は事業の主宰者であり、事業の収入から見て資力喪失している状態とは、事業を経営しているが①収入金額（純所得金額）により借入金の返済（元本、利子を含む）が賄なえていない状態であること、②保有資産により債務の返済ができないこと、③主宰者の生活費が現在得られている収入額（事業収入や転業した場合の他の収入）から見て困窮していることの３点がポイントとなる。

その事実は損益計算書、貸借対照表や給与の収入状況から検証できる。

①　債務超過の状態

債務の超過が昭和42年から昭和47年までの５期間継続していること。

②　保有資産については、土地家屋は保有せず、機械装置は特別な製品を製造するよう設計されその他の用途には使用ができなくなく、すでに分解されて軒下に積まれている状態で、他にほとんど見るべき財産がないこと。

③　昭和43年から昭和47年までの所得税確定申告書によると総理府統計局家計調査「１世帯当り年間消費支出額（東京区部)」を下回っていること、昭和46年に事業を転換したがその収入で債務を返済することは不可能であること。

以上の判断から請求人は、A社からの債務免除益を事業所得の総収入金額に

算入していないことについて、原処分庁がした更正処分等の全部を取消された。

ここでは、青色申告決算書、所得税確定申告青色書と内閣府（総理府）統計局家計調査[18] が参考資料となった。

(2) サラリーマンの場合

事例２[19]（法８条の適用事例）

請求人（X）は被相続人から株式を借用し株式の信用取引をしていた。ところが株価が下落したので、現引きをする際に父親である被相続人より借用した株式を返還することができなくなり贈与として処置をした。株価はその後もさらに下落した。この株式の贈与を受けたのが平成５年 11 月 25 日であり、①保有資産内容から見て、資産はその後大幅に下落した（平成３年のバブル崩壊の後遺症）。下落した状態では債務超過（信用取引による債務超過）であり、②被相続人の相続開始日が平成５年 12 月５日であり、相続税については期限内申告したが、申告時点では相続財産は未分割であった。遺留分の請求権があるとして債務超過を計算した。

一方、原処分庁では、①贈与を受けた日が相法８条の但し書きの資力を喪失していることの判定する基準日であること、②相続財産は未分割であるので、法定相続分が X に帰属すること、③受贈者の将来の収入については給与収入が 2,962 万円および配当所得 133 万円余であること。④個別評価の方法について、家屋の評価は、X が確定申告書に添付して提出した「財産及び債務の明細」に記載されている金額から見て、債務超過の状態ではないとして、審判所は原処分庁の更正処分を認容した。

ここでの争点は、①債務超過の判定の日は、贈与後株式等が下落傾向にあったとしても贈与の日で判定すること、②建物の評価は取得価額から減価償却費を控除した額より、固定資産税評価額を否認したこと、③相続財産は未分割で申告されているので未分割遺産の法定相続分相当が X の財産となること、であった。

この事例は、X の資力を喪失したかどうかの判断基準日は贈与の時点で評価し判断するといいつつ、一方で贈与のあった日の直近に開始した相続財産も将来受領可能財産であるので、受贈者の財産に加算し判定をしていること（X も加算）が若干気になる点である。この相続財産は将来収入の見込みと評価したのであろうか。

各財産の評価について、土地は相続税評価により、建物の価額は取得価額より減価償却を控除した額が時価とした点でも一貫性がなく相当性から見て疑問となる点である。

⑶　その他の者の事例

⒜　事例３[20]

法人の事例（子会社への経済的利益の免除と寄付金）

債権の回収可能性を判断する上では「債務者が単に債務超過の状態にあるかどうかのみによってではなく、例えば、債務者において債務超過の状態が相当の期間継続し、とうてい再起の見込みがなくてその事業を閉鎖あるいは廃止して休業するに至ったとか、会社整理、破産、和議、強制執行、会社更生などの法的手続によっても債権の支払を受けられなかったなど、債権の回収ができないことが客観的に確認できる場合にはじめて回収不能と判断すべきものである」とし、本件子会社はこのような状態にないとし貸倒損失を否認し、寄付金と認定した。

⒝　事例４[21]、

法人の事例（請求人と株主を同じくする関連会社への過失権利息の免除と寄付金を全部取消した。）

D 社の財政状態は、損益計算書の損失は昭和 49 年 12 月期、▲ 7055 万円、昭和 50 年 12 月▲ 1 億 0272 万円、昭和 51 年 12 月▲ 1 億 4605 万円、昭和 52 年 12 月▲ 1 億 3666 万円、昭和 53 年 12 月▲ 1 億 9785 万円であり、貸借対照表の純資産価額は、順次、 1 億 3590 万円、 2 億 5342 万円、 3 億 7197 万円、 5 億

4043万円、８億1217万円の債務超過であった。このような状況では現実に利息を回収することが極めて困難であり、未収利息を益金の額に算入することが著しく実情に即さないと認められ、実際に利息を回収するまで益金の額に算入しないことも、公正妥当な会計処理の基準に従っているものと解すべきであると判断された。

その主な理由は、利息を免除した請求人と株主を同じくする関連会社は、業績が逐年悪化し、相当期間（５年間以上）債務超過の状態が継続しており、同社から、現実に利息を回収することは極めて困難な状態にあったものと認められると判断された。

⒞　事例５[22]

債務免除の判断は、相手会社の実質的な破産状態、債務超過の状態が継続していることが基準であること。

甲社の資力の状況等については、株式会社乙社が刊行する平成８年８月７日付の日刊〇〇紙によれば、甲社は、２回目の不渡りを出し、同年８月６日に銀行取引停止となり、負債総額は約950億6900万円である旨報じていること、および平成８年２月29日付、平成９年２月28日付および平成10年２月28日付の各貸借対照表から、順次その純資産価額を算出すると、いずれも147億8470万円、214億84,80万円および356億8017万円の債務超過の状態が続き、銀行取引が停止され、多額な債務超過が継続しており、休業状態にあること。また、繰返し土地を譲渡しているが、多額な譲渡損失が発生していることから、所有している土地の価値は大幅に下落していると認められ、本件和解が成立した平成９年12月11日には、その資産内容は極めて悪い状況にあり、債務超過の状態が相当期間継続していたことが認められる。

請求人は、甲社に対する金銭債権に対して担保物を有していないから、甲社には、請求人の金銭債権を返済する資力はないと認められる。以上の理由から本件金銭債権を貸倒損失として損金経理した請求人の処理が認められた事例である。

⒟　事例６[23]　不渡手形との関係

個人の金融業者が貸金につき、不渡手形を出した個人に対する貸金を資力が喪失したとして必要経費に計上した事例

債権は①債務者が不渡手形を出した後に貸付をしたことは、債務超過が継続しているが、返済可能性から見て貸倒の要件に該当しない。また、②不渡手形を出した年に直ちに、回収不能とはならない。③翌年に債務免除の通知をしたのであるから、貸倒（資力を消失した状態）は通知をした年分の必要経費である。よって、の更正処分（否認事項）は相当と判断した。

⒠　事例７[24]

自己破産と債務超過の状態　過去に事実が生じているので、否認された事例

請求人（法人）は、昭和 62 年損害賠償請求事件における請求原因として、K が昭和 59 年 11 月当時、多額の焦げ付きを発生させ、支払不能の状態となっていた旨および同人は昭和 62 年７月 17 日現在において自己破産申立て中であり、同人から貸付残金の回収見込みがない旨、それぞれ主張していたこと、さらに、K は昭和 61 年５月○日に自己破産を申立て、その手続が昭和 63 年 10 月○日に終局となり、同年 11 月○日に完結されていることが認められる。

そうすると、本件債権については、遅くとも、K に係る破産手続が完結した日の属する平成元年３月期において貸倒が発生していたものであり、平成 10 年３月期においては、当該債権に係る貸倒の事実が発生していないこととなる。

自己破産が確定した段階で債務超過の認識が明確になるとして、請求人の主張が否認された。

法人税法 22 条第３項の損失の発生は、資本取引以外はその事実があった当該事業年度の損金となるために、後日損金算入ができとされた事例である。

（なお、検討を要するのは、法人税法 129 条２項との関係である。）

⒡　事例８[25]　資力喪失と任意売却または強制売却との関係

資力喪失に伴う資産の譲渡では、①本件平成 11 年譲渡は、任意売買ではあるが、所得税法施行令第 26 条に規定する「強制換価手続の執行が避けられないと

認められる場合における資産の譲渡」に該当すると認められ、②請求人の債務超過の状態は著しく、③譲渡時および近い将来においてもその債務の全部を弁済するための資金の調達もできず、④本件平成 11 年譲渡の譲渡代金（譲渡費用を除いた後の金額）の全部が本件平成 11 年譲渡時に存した債務の弁済に充てられたと認められるとした。

具体的な判断では、譲渡時点で①財産状態は、資産 1 億 4594 万円、負債 3 億 7098 万円、債務超過額 2 億 2503 万円、②平成 10 年、11 年の所得はゼロであり、生活費は親や兄弟姉妹からの借入で賄っていた。

返済に充てられたかどうかについては、譲渡代金 5100 万円、減少債務 5090 万円であり、小口の借入である親族の返済に廻したとしても手元に残ったものは無いと認めるのが相当と認定し、請求人の請求を認容した。

(G)　事例 9[26]　近い将来、資金調達が見込めるかどうか

請求人は、年金収入以外に広告業の事業収入はあるが平成 4 年から平成 6 年までの事業収益および事業規模はパート並みであり、本件譲渡時の属する年分の請求人の営業所得は 1,542,699 円で、年金収入が 2,756,834 円であったことが請求人の平成 6 年分確定申告書等から認められ、この収入状態では、本件譲渡時の債務超過額として 28,543,055 円の全額を弁済する資力があったとはいえない。

また、請求人の収入状況は、営業所得が平成 5 年分 1,476,529 円、平成 6 年分 1,542,699 円および平成 7 年分 3,408,602 円で、年金収入は、平成 5 年分 2,699,868 円、平成 6 年分 2,756,834 円および平成 7 年分が 2,871,236 円とそれぞれ増加傾向にあること。

本件譲渡時に請求人は 67 歳と高齢であり、近い将来大幅な営業収入の増加が見込める要因は認められないこと。また、請求人には銀行取引停止処分の事実はないものの、保有している土地等も地方裁判所仮差押命令を原因とする仮差押えを受けていることから、請求人は近い将来において金融機関等からの借入による資金調達も困難であったと認めるのが相当であること。

以上の状況を判断し、請求人は債務超過の状態が著しく、近い将来においても債務弁済のための資金を調達することができない状態にあったと認め、原処分庁の更正処分の全部を取消した。

この事例では、各年分の所得金額等は次のような額となっていた。

収入金額等（単位：円）

年　分	営業所得	年金収入	合　計
平成５年分	1,476,529	2,699,868	4,176,397
平成６年分	1,542,699	2,756,834	4,299,533
平成７年分	3,408,602	2,871,236	6,279,838

６　立証資料について

資力を喪失した者が受ける贈与課税の除外規定の立証資料について、上記の事例から分析すると次のようなことである。

⑴　困窮の状態の証明資料

困窮した状態は次のような点から総合的に判断する。

１．収入金額（純所得金額）により借入金の返済（元本、利子を含む）が賄なえていない状態であること

２．保有資産により債務の返済ができないこと

３．主宰者の生活費が現在得られている収入額から見て困窮していること（事業収入や転業した場合の他の収入を含む）

いずれにしても、贈与税の免除規定の対象者は個人であるので、そのための資料は、①事業者の場合には青色申告決算書、確定申告書、財産債務明細書、②その他の者では、個人の財産債務調査書を作成し証明することとなる。

⑵　作成時期と評価方法

これら資料の作成の時点は何時かについては、贈与があった日であり、資産の評価は時価主義であるが土地等については相続税評価により、建物については取得価額から減価償却を控除した額により評価をすることとなる。また、上場株式の評価は、同様に贈与の時点で評価すること（事例２）。

なお、土地の時価について、東京地裁平成 19 年 9 月 27 日判決平成 18 年（行ウ）第 411 号では、貸倒損失の債務会社の債務超過の判定について、相続税評価を否認し、財産評価 ÷ 0.8 ＝時価を基準に算定すべきであると更正処分を相当としたが、時価の定義が定まっていないので、これが相当かどうか疑問である。

⑶　債務の範囲と債務の額

債務の範囲は、金融機関からの債務（元本、未払利息を含む)、税金の未払債務、その他の未払金等の全ての債務をいい、金融機関等からの債務以外の債務も含まれる。例えば、個人的な借入金についても認識し計算することとなる。特に、兄弟姉妹間の債務では、民法の規定により扶養義務関係にある場合もあり、生計費と借入金が混同される可能性があるが、社会的地位や受贈者の過去の事業歴等から、生計費と区分し借入金と判断する。

⑷　金融機関以外の債務証明

金融機関を通さない借入金や未払金については、借入金メモ[27] や購入明細書、請求書が有効であり、支出明細も有効な証明資料となる。

⑸　債務超過の状態の判断期間

債務超過の状態が継続する期間について、どの程度の継続する必要があるかは、少なくとも５年間程度以上継続していることが、資力喪失の判定要素となっている。しかし、昨今の不況では、もっと短い期間においても、返済不能が顕

著となる。法人の事例４では５年間、個人の事例では、事例１は５年、事例９は３年間がある。

⑹　生計費の証明

将来収入と生計費については、返済能力を判定する上で重要となる。生計費について、事例１では内閣府家計調査による消費支出額基準としている。ちなみに、平成18年分では、二人以上の世帯の消費支出額は１ヶ月で294,943円、年額3,539,316円となる。

この消費支出が最低生活費の一つの指標となるので、これより少ない収入では、返済に廻す資金がないこととなる[28]。

⑺　債務超過と資力喪失の判断

現下、多くの法人の事業所では赤字経営（損益計算書で損失、債務超過状態）であり、その割合は平成19年では、67.9％（国税庁税務統計より）とされているが、事業を継続し、新規に借入ができる状態は、資力が喪失したものには該当しないとされる（事例６参照）。

これは将来収入の見込みが立っていると見られ、資力喪失と判断されないこととなる[29]。しかし、その先の収入計画と返済計画の結果、返済が不可能である時は判断が異なるから、事業計画が重要な資料となる。

⑻　国税庁の事務連絡

なお、保証債務の特例における求償権の行使不能に係る税務上の取扱いについて、国税庁は中小企業庁から照会に対して次のような判断を示した（平成14年12月25日課資３-13）。

「求償権行使の能否判定の考え方、主たる債務者である法人の代表者等が、その法人の債務に係る保証債務を履行した場合において、所得税法第64条第２項におけるその代表者等の求償権行使の能否判定等は、次による。

1　求償権行使の能否判定は、他のケースと同様、所得税法基本通達 51-11 に準じて判定する（所得税法基本通達 64-1）。このうち、同通達 51-11⑷については、その法人がその求償権の放棄後も存続し、経営を継続している場合でも、次のすべての状況に該当すると認められるときは、その求償権は行使不能と判定される。

その代表者等の求償権は、代表者等と金融機関等他の債権者との関係からみて、他の債権者の有する債権と同列に扱うことが困難である等の事情により、放棄せざるを得ない状況にあったと認められること。

これは、法人の代表者等としての立場にかんがみれば、代表者等は、他の債権者との関係で求償権の放棄を求められることとなるが、法人を存続させるためにこれに応じるのは、経済的合理性を有する、との考え方に基づくものである。

その法人は、求償権を放棄（債務免除）することによっても、なお債務超過の状況にあること。

これは、求償権の行使ができないと認められる場合の判定に際しての考え方である。

なお、その求償権放棄の後において、売上高の増加、債務額の減少等があった場合でも、この判定には影響しないことになる。

2　その法人が債務超過かどうかの判定に当たっては、土地等及び上場株式等の評価は時価ベースにより行う。

なお、この債務超過には、短期間で相当の債務を負ったような場合も含まれる。」（・・・は筆者が附した。）

おわりに

一定の条件の上で贈与税は「資力を喪失した者が受ける贈与」の課税について除外規定を置いているが、無条件でこの適用があることはなく、各納税者で

ある受贈者の環境によって、その条件は異なるので、それぞれのおかれた状況を検証し、証明資料（疎明資料）を確保することとなる。

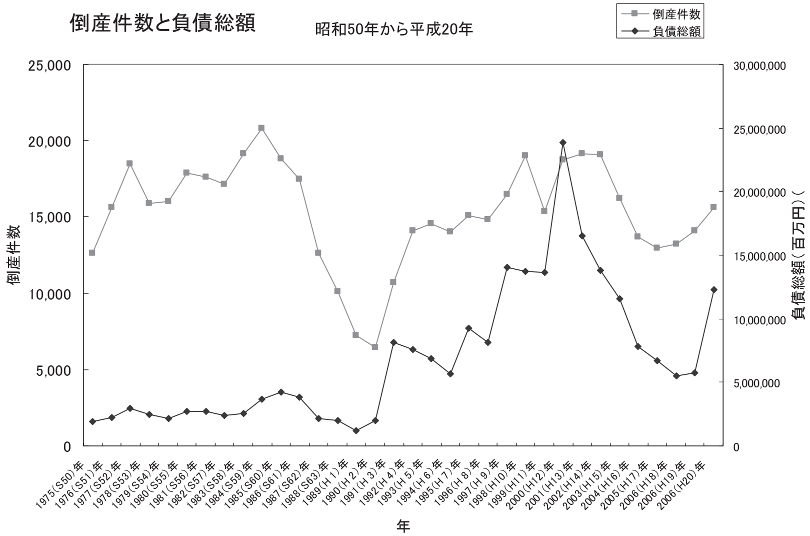

表１　東京商工リサーチ調査より

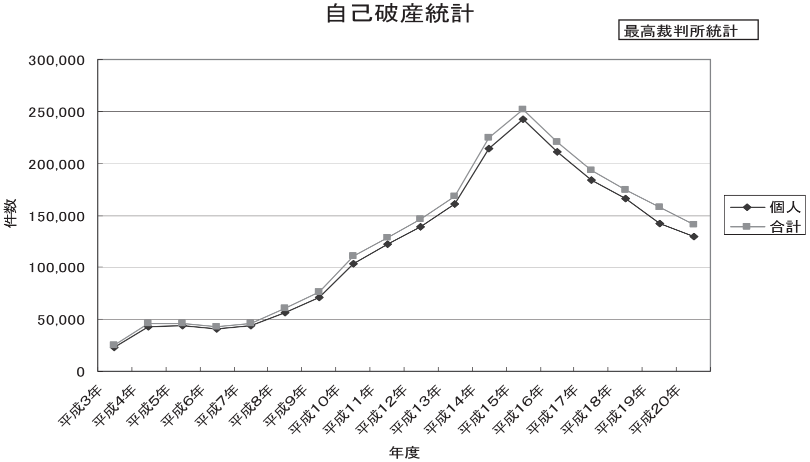

表２　個人自己破産

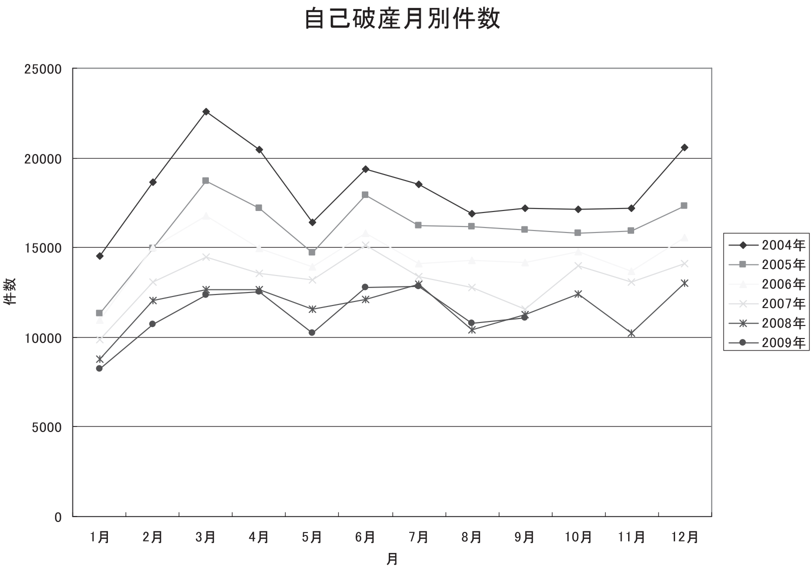

表３　最近６年間の月別自己破産件数（最高裁判所発表）

注

1　金子宏『租税法』（弘文堂、第 14 版、2009）489 頁
2　水野忠恒『租税法』（有斐閣、第 4 版、2009）675 頁
3　東京商工リサーチ調査より（表 1 ）
4　個人自己破産　最高裁判所統計より（表 2 ）
5　最近 5 年間の月別自己破産件数（最高裁判所発表）（表 3 ）
6　ここでは倒産または破産とは倒産法第 1 条「支払不能又は債務超過にある」状態の事業者または個人をいう。
7　最高裁判決平 16.12.24 判例タイムズ 1172 号 129 頁日本興業銀行事件「不良債権に係る貸倒損失の損金算入時期」等
8　近江幸治『民法講義Ⅴ』（成文堂、第二版、2003 年）111 頁
9　金子宏前掲 467 頁、水野忠恒前掲 633 頁
10　例えばイギリスでも相続税はあったが、贈与税の創設は 1960 年代である。
11　法人の定義は、相続税法には規程がないので、国税通則法第 3 条（人格のない社団等）の扱いを準用することとなる。
12 「著しく低い価額」とは、単に「低い価額」と「著しい低い価額」とは、区分する必要があり、税法では、このような用語の定義が行政上、「低い価額」を「単に低い価額」と「著しい価額」と同義に解して、執行しているようであり、その判断が争いになった事例がある。東京地裁判決平成 19 年 8 月 23 日（TAINSZ888-1280）判例タイムズ 1264 号 184 頁（納税者勝訴）、（批判）今本啓介・ジュリスト 1372 号 196 頁「相続税評価額による親族間の土地の売買のみなし贈与該当性」

説示による「相続税法 7 条は、当事者に租税負担回避の意図・目的があったか否かを問わずに適用されるものであること、本件各売買が行われた平成 15 年 12 月 25 日当時、本件土地の路線価は更地価格の時価の約 81 パーセントだったのであるから、本件土地は、地価公示価格と同水準の価格の 80 パーセントという一般的な路線価決定の基準に合致していた。同じ時点における本件土地の相続税評価額も、時価の約 78 パーセントだったのであり、路線価と更地価格の時価との比率におおむね一致している。この相続税評価額は、処分行政庁自身も贈与税課税の根拠とすることを是認していたものでもあった。そうすると、本件土地については、相続税評価額が時価の 80 パーセントの水準よりも低いことが明らかであるといえるような特別の事情は認められないから、相続税評価額と同程度の価額かそれ以上の価額の対価によって譲渡が行われた場合、相続税法 7 条にいう「著しく低い価額」の対価とはいえないということができる。そして、甲購入持分も、乙購入持分も、相続税評価額と全く同じ金額の代金によって譲渡されたものであるから、結局、本件各売買の代金額は、いずれも「著しく低い価額」の対価には当たらない。」判断した。相続税評価通達により評価した額は相続税法 7 条でいう「著しい低い価額」に当たらないとした。

すなわち、父親が取得をした土地等を、売却する時の時価は、財産評価基準により譲渡する場合の時価は、財産評価通達の評価によっても、相続税法 7 条の「著しい引き価額」に該当しないと判断された。

13　東京地裁平 19.8.23 判決（TAINSZ888-1280)、品川芳宣＝緑川正博「負担付贈与通達判決は、実務上、疑問を残したままだ!!」速報税理、2007.11.11 ～ 11.21 参考

14　清水ふみ代「否認事例から探る『資力喪失』状態の立証ポイント」税理 2004.12 号 169 頁

15　遠藤他編著『民法親族』（有斐閣双書、(8)2004）319 頁

16　前掲書 320 頁

17　事例１昭和 49 年 12 月７日裁決（TAINS　F0-1-201)、他に、事例９：平成９年６月 18 日裁決（TAINS　F0-1-101)、事例８：平成 15 年６月 27 日裁決（TAINS　F0-1-163）がある。

18　内閣府家計調査は「国民生活における家計収支の実態を把握し、国の経済政策・社会政策の立案のために基礎資料を提供すること」として、毎月調査している平成 18 年家計の概要が公表されている。月平均（二人以上の世帯）の消費支出額は 13 年 309,054 円、14 年 305,953 円、15 年 301,841 円、16 年 302,975、17 年 300,531 円、18 年 294,943 円である。（一世帯 3.16 人、世帯主平均年齢 55.2 歳）平成 18 年消費支出が減収したのは、社会保険料の増額、診療報酬の増額、介護保険料の増額等が影響し消費支出が減少した（同コメント）

19　事例２　平成９年３月 31 日裁決　裁決事例集 53 集 356 頁（TAINSJ53-4-20)

20　事例３　昭和 54 年６月 28 日裁決　裁決事例集 18 集 3-02（TAINSJ18-3-02)

21　事例４　昭和 56 年 10 月 14 日裁決　裁決事例集 23 集 3-06（TAINSJ23-3-06)

22　事例５　平成 14 年２月 10 日裁決　（TAINSF0-2-057)

23　事例６　名古屋地裁判平成２年 11 月 30 日　税資 181 巻 6610 頁

24　事例７　平成 15 年２月 19 日裁決　裁決事例集第 65 集 450 頁（TAINS　J65-3-32)

25　事例８　平成 15 年６月 27 日裁決（TAINS　F0-1-163)

26　事例９　平成９年６月 18 日裁決　（TAINS　F0-1-101)

27　事例 10　昭和 54 年６月 26 日裁決事例集 18-2-01（TAINS　J18-2-01)

28　注記１の事例では、所得は平成７年分所得金額 99 万円、平成８年分 86 万円であった。

29　名古屋地裁平成８年３月 22 日判決、税資 215 号 960 頁、債権放棄をしたが合理的な返済計画もなく、訴外Ａ社は営業自体が特に不振とは認められないとして、請求が棄却された。

〔論　説〕

社会制度としての財務諸表監査の基礎理論
——社会的共通資本の視点から——

栗　濱　竜一郎

1．はじめに

資本主義経済の中核を担う金融市場（とりわけ、株式市場）および株式会社が不安定になれば、社会も不安定になる。金融市場および株式会社、ひいては社会の安定性を確保するためには、何らかの社会的装置が必要である。金融市場および株式会社の安定性、ひいては社会の安定性を確保する一つの社会的装置が、財務諸表監査制度である。まさに、財務諸表監査制度は、これらの安定性の確保に重要な役割を担っているのである[1]。逆に、監査の失敗は、金融市場および株式会社、ひいては社会を不安定にさせる一つの要因となる。そのため、財務諸表監査制度そのものが安定的に維持させることが重要である。

このような意味で、財務諸表監査は社会制度と捉えられている。そもそも、監査は、その考え方や技法に関する意義が社会的に認められ、われわれの社会において不可欠なものとして定着した社会制度である。つまり、財務諸表監査制度は、われわれ社会においてその存在が認められており、必要不可欠な制度である。

しかしながら、財務諸表監査制度とは何であるか、どのような特性を有しているか、そしてどのように管理・運営すればよいのかなどに関しては、理論的

に十分に明確にされていない。財務諸表監査制度に関する議論は、それを規制する法律の面だけから議論されるものではないのである。

そこで本稿では、社会制度としての財務諸表監査の基礎理論を明らかにする。財務諸表監査制度の基礎理論を明らかにすることによって、財務諸表監査制度の特性などが理解でき、さらにより望ましい財務諸表監査制度を考えていく際の手助けになるものと思われる。

２．制度と財務諸表監査

財務諸表監査は社会制度であるが、そもそも財務諸表監査制度はどのような前提に基づいて設計されるのであろうか。また、財務諸表監査制度は、われわれの社会においてどのように捉えられ、どのように位置づけられているのであろうか。ここでは、これらの疑問に則って、財務諸表監査制度に関して考察していく。

2.1　財務諸表監査制度の設計思想

どのような制度を設計するかは、制度設計の背後にある設計思想によって異なってくる。たとえば、西部（2004、2006）は、経済システムにおける諸制度の設計思想には、構築主義と操作主義があるとする。構築主義は、マクロレベルのシステムや構造をミクロレベルの経済主体の行動原理に基づいて最適に構築することを目的としている。他方、操作主義は、マクロレベルの変動や不安定性を裁量的にコントロールすることを目的としている[2]。どちらの設計思想も、経済主体を合理的な経済人と仮定している。この合理的な経済人は、経済合理性と方法論的個人主義を両輪に持つ概念である[3]。

それでは、従来の財務諸表監査制度は、どのような設計思想を持っているのであろうか。従来、金融市場（とりわけ、株式市場）における財務諸表監査はASOBAC（AAA、1973）およびウォーレス（Wallace、1980）の情報仮説を、

株式会社における財務諸表監査はウォーレスのスチュワードシップ仮説を用いて説明されてきた。そして、わが国の金融商品取引法における財務諸表監査制度も ASOBAC および情報仮説を、会社法における会計監査人監査制度もスチュワードシップ仮説を用いて説明することが可能であるとされている。ASOBAC および情報仮説は効率的市場仮説を、スチュワードシップ仮説はエージェンシー理論を理論的背景に持つ。効率的市場仮説もエージェンシー理論もともに、経済主体を合理的な経済人と仮定している。このように、従来の財務諸表監査制度は、主として、経済主体を合理的な経済人と仮定し、構築主義に基づいて設計されてきたと考えられる。

しかしながら、理論的に突き詰めて考えると、経済主体を合理的な経済人と仮定すれば、貨幣などの何らかの外部の制度は必要なくなり、仮に存在したとしても補足的なものとして捉えられることとなる。なぜなら合理的な経済人は、情報解釈のための真のモデルにしたがって瞬時に情報を正しく解釈できるからである。このことは、合理的な経済人を前提にすれば、財務諸表監査制度そのものが成立し機能する必然性はなくなるということである。仮に財務諸表監査制度が存在したとしても、合理的な経済人にとって財務諸表監査制度は補足的な意味しか持たないのである。奇妙なことに、従来までの財務諸表監査の見方は、財務諸表監査制度の成立を否定するような論理構造でありながら、財務諸表監査の生成、意義、そして機能などを説明していたのである。

現実に、われわれは合理的な経済人ではない。合理的な経済人ではないがゆえに、社会の人々は、財務諸表の信頼性を自ら検証することができないため、財務諸表監査制度を必要としているのである。財務諸表監査制度の設計思想には、合理的な経済人と異質な主体像を導入する必要がある。それにより、財務諸表監査制度を社会制度として設計することが可能となるのである。

したがって、合理的な経済人とは異質な経済主体、すなわち「代替的な経済主体[4]」を前提にすることにより、財務諸表監査制度そのものが成立し、機能する必然性を論じることができるのである。この代替的な経済主体は、真のモデ

ルを持たず情報処理能力に限界がある限定合理的な主体であり、そのため、自らの認知枠組みや記憶などに基づいて判断や行動する主体である。財務諸表監査制度は、代替的な経済主体を前提としてはじめて成立し機能するのである。

2.2　財務諸表監査制度の捉え方

合理的な経済人とは異質な代替的な経済主体を前提とする財務諸表監査制度は、われわれの社会においてどのように捉えることができるのであろうか[5]。合理的な経済人を仮定せず代替的な経済主体を前提とする制度の捉え方には、たとえば、ヴェブレン（Veblen、1909）やホジソン（Hodgson、2006）などがある。ヴェブレンによれば、制度は、「人間一般に共通なものとして定着した思考習慣（p. 626）」と定義される。また、ホジソンによれば、制度とは、「社会的相互作用を構造化する、確立され普及した社会的ルールの体系（p. 2）」と定義される。つまり、制度とはルールの束と捉えることができるであろう。ルールは、認知・行動の定型的パターンや習慣から、認知・行動を社会的に規制する慣習や法などまでを含むものである。前者は暗黙的なルールが多く、後者は明示的なルールが多い。なかでも、明示的なルールの場合には、実行命令（もし～ならば、～せよ、あるいは、もし～ならば、～を行えなど）および禁止命令（もし～ならば、～するな、あるいは、もし～ならば、～を行うななど）によって目的や手段などを記述することが多いのである。

それでは、制度をこのように捉えると、制度は、社会においてどのように位置づけられるのであろうか。近年、社会を「ミクロ・マクロ・ループ」（塩沢、1997a、1997b）として理解しようとする考え方がある。この考え方は、ミクロレベルの経済主体の行動などは、マクロレベルの社会・経済パフォーマンスに影響を与えるとともに、経済主体の行動などはマクロレベルの社会・経済パフォーマンスに影響を受けるとする。つまり、このミクロ・マクロ・ループは、ミクロレベルとマクロレベルの相互規定的な関係である。このミクロ・マクロ・ループにおいて、制度は、ミクロレベルとマクロレベルの中間、いわゆる

メゾレベル[6]に位置し、両レベルの相互作用を媒介とするものである（西部、2004、2006）。つまり、制度は、ミクロレベルの経済主体の認知枠組みをかなりの程度規定しそれに伴う行動に影響を与え、その経済主体の行動がマクロレベルの社会・経済パフォーマンスに影響を与えるものである。このように、制度などをメゾレベルと位置づけることにより、社会を「ミクロ・メゾ・マクロ・ループ」として理解することができるとされている。このミクロ・メゾ・マクロ・ループの考え方は、ルールの一部に変更を加えることによって、ミクロレベルの経済主体の認知枠組みや行動などを変化させ、その結果としてマクロレベルの社会・経済パフォーマンスを望ましいレベルに変化させることを念頭に置いている。そのため、どのようなルール変更が望ましいかなどが重要な課題となる。

以上のことから、財務諸表監査制度とは、社会的相互作用を構造化する、確立され普及した社会的ルールの体系、すなわち財務諸表監査に関するルールの束と捉えることができるのである。このルールは、たとえば、わが国では、監査の基準（監査基準および実務指針など）、品質管理の基準（品質管理基準および実務指針など）、日本公認会計士協会の倫理規則、そして公認会計士法などの財務諸表監査に関連する各諸法規などが該当する。

また、この財務諸表監査制度は、メゾレベルに位置づけられる（図１）。つまり、財務諸表監査制度は、経済主体（監査人経営者、そして社会の人々）の認知枠組みをある程度規定しそれに伴う行動に影響を与え、その経済主体の行動がマクロレベルの社会・経済パフォーマンスに影響を与えるものと考えることができる。そのため、財務諸表監査制度におけるルール変更は、ミクロレベルの経済主体の認知枠組みや行動に変化を及ぼし、その結果としてマクロレベルの社会・経済パフォーマンスを望ましいレベルに改善させることができるのである。たとえば、監査基準の改訂や公認会計士法の改訂などのルール変更は、経済主体の認知枠組みや行動に変化を及ぼし、その結果として社会・経済パフォーマンスに影響を与えるものと考えられる。ちなみに、会計制度もメゾレ

ベルに位置づけられる。

加えて、財務諸表監査制度そのもの存在が、経済主体にとって「節減効果」となる。つまり、財務諸表監査制度が安定的に維持されていれば、経済主体（とりわけ、社会の人々）は、財務諸表監査にかかわる複雑さ（たとえば、経営者にとっては自ら財務諸表の信頼性を立証すること、社会の人々にとっては自ら財務諸表の信頼性を検証することなど）を縮減することができる。それより、各経済主体は、他の事柄に意思決定や行為を振り向けることができるのである。それゆえ、財務諸表監査制度の安定性の確保が望まれるのである。

なお、財務諸表監査制度も制度であるため、制度変化は起こりうる。これは頻繁に生じることではないが、経済主体は、財務諸表監査に関するマクロパフォーマンスが望ましくないと評価するとき、メゾレベルの財務諸表監査制度のルール変更を望むようになるだろう[7]。こうして、財務諸表監査制度の変化が生じることとなる。メゾレベルである財務諸表監査制度は、ミクロレベルとマクロレベルの両方のレベルによって影響を受けることがありうるのである。

以上のような財務諸表監査制度の捉え方と位置づけは、従来とは異なるもの

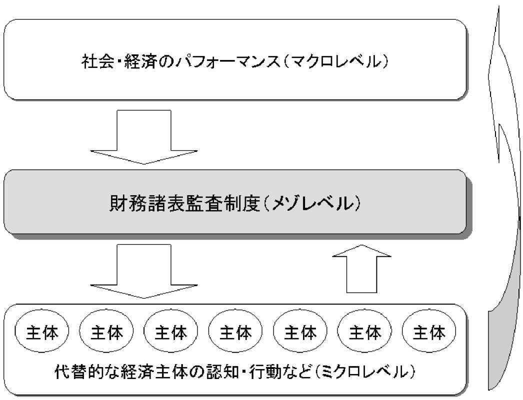

図１　財務諸表監査制度の位置づけ（ミクロ・メゾ・マクロ・ループ）

（出所）西部（2006）を参考に作成している。

である。この捉え方と位置づけによって、われわれは、財務諸表監査制度の重要性がより一層理解できるのである。

3．社会的共通資本としての財務諸表監査制度

ヴェブレンの制度の考え方を具現化したものが、社会的共通資本であるとされる。上述の財務諸表監査制度の捉え方は、社会的共通資本に通じるものである。なぜなら、社会的共通資本は、代替的な経済主体が社会生活を行う上で必要なものであるからである。そこで、ここでは、社会的共通資本の視点から、財務諸表監査制度を見ていくこととする。

3.1　社会的共通資本の概念

ここでは、社会的共通資本の概念を、宇沢（1977、1990、2000a、2003 など）に基づいて見ていくこととする。

「社会的共通資本（social overhead capital）」は、一つの国ないし特定の地域に住むすべての人々が、豊かな経済生活を営み、すぐれた文化を展開し、人間的に魅力ある社会を持続的かつ安定的に維持することを可能にするような社会的装置を意味する。社会的共通資本は、一人一人の人間的尊厳を守り、魂の自立を支え、市民の基本的権利を最大限維持するために、不可欠な役割を果たすものである。そのため、社会的共通資本は、社会にとっての共有の財産であり、社会的に管理され維持されるものである。

また、社会的共通資本は、外部性を有している。そのため、社会的共通資本は、そこから生み出されるサービスが社会の個々の人々に対してどのような便益をもたらすかというミクロ的な性質だけではなく、社会的安定性というマクロ的な性質にも関係するものである。そして、社会的共通資本は、資本主義経済が円滑に機能し、実質的な所得分配などが安定的になるような制度的前提条件である。

この社会的共通資本は、次の三つの範疇に分けることができる。

① 自然環境

自然環境は、大気、水、森林、河川、海洋、そして土壌など、自然に賦与されているものであり、人々の生存のために不可欠なものである。

② 社会的インフラストラクチャー

社会的インフラストラクチャーは、道路、交通機関、上下水道、電力、ガス、水道、警察、そして消防などのいわゆる社会資本を意味する。

③ 制度資本

制度資本は、医療制度、教育制度、司法制度、市場制度、行政制度、そして金融制度などの制度を広い意味での資本と考えようとするものである。

これら三つは排他的でもなく、また網羅的ではない。社会的共通資本の概念は、技術的あるいは行政的な制約条件によって規定されるものではなく、むしろ、社会的、文化的、歴史的な条件によって規定されるものである。なお、ここでの「資本」とは、ある時点に現に存在する希少資源のストックという広義の意味で用いられている[8]。

3.2 制度資本[9]としての財務諸表監査制度

「制度資本」は、社会的共通資本を主として制度的な側面に焦点を当てたものである。制度資本は、社会の人々が、人間的な尊厳を保ち、市民的自由を最大限享受できるような社会を持続的かつ安定的に維持するために、必要不可欠な社会的装置である。逆に言えば、制度資本が存在しない場合やそれが安定的に維持・管理されない場合には、社会的不安定性をもたらすことになる。それゆえ、安定的な社会を具現化するために、社会において制度資本が必要とされるのである。

また、制度資本の考え方は、上述のように、代替的な経済主体を前提としていると考えられる。もし合理的な経済人であれば、制度それ自体が成立しないため、制度資本の考え方は必要ないものであるからである。他方、代替的な経

済主体は、合理的な経済人ではないため、制度を必要とするのである。なぜなら、代替的な経済主体は、自らの認知枠組みや記憶に基づいて判断・行動をするため、この認知枠組みの形成にとって制度が重要な役割を担うからである。したがって、制度資本の考え方は、代替的な経済主体にとって必要不可欠なものである。

たとえば、金融制度は、その機能が円滑に機能するとき、現在から将来にわたる長い期間を通じて、経済活動の円滑な機能とそれに伴う大きな社会的経済的な便益をもたらし、社会的安定性を維持するために重要な役割を果たすとされている。逆に、もし金融制度が円滑に機能しない場合には、現在から将来にわたり、経済活動は円滑に機能しなくなり、それに伴い大きな社会的経済的な不利益をもたらし､社会的不安定性をもたらすことになる。このような意味で、金融制度は、制度資本としてみなされているのである。

そこで、財務諸表監査制度を制度資本としてみなすことができるかどうかを考えてみる。これまで筆者の考察によると、財務諸表監査は、資本主義経済の中核を担う金融市場（とりわけ、株式市場）および株式会社の安定性などの確保に重要な役割を果たしている。財務諸表監査制度は、金融制度と同様に、その機能が円滑に機能するとき、金融市場および株式会社の安定性を確保し、現在から将来にわたる長い期間を通じて、経済活動の円滑な機能とそれに伴う大きな社会的経済的な便益をもたらし、社会的安定性を維持するために重要な役割を果たしているのである。逆に、監査の失敗は、金融市場および株式会社の不安定性をもたらし、現在から将来にわたり、経済活動は円滑に機能しなくなり、それに伴い大きな社会的経済的な不利益をもたらし、社会的不安定性をもたらす一つの要因となる。このような状況は、実は、われわれは目の当たりにしてきた。たとえば、エンロン事件、ワールド・コム事件、ライフドア事件、カネボウ事件、日興コーディアル事件などの監査の失敗である。したがって、財務諸表監査制度が十分に機能している場合、他に負の要因がなければ、社会的安定性は維持されるといえるであろう。

このような意味で、財務諸表監査制度は、他の制度資本と同様に、社会を持続的かつ安定的に維持するために必要不可欠な社会的装置の一つであり、制度資本としてみなすことができるのである。財務諸表監査制度は、社会において中枢的な制度であるといえる。このような本稿の考え方は、アメリカのコーエン委員会報告書（AICPA、1978）が示した、財務諸表監査を社会統制（Social Control）とみなす考え方と符合していると思われる。残念ながら、監査人も被監査会社も社会の人々も、財務諸表監査制度を制度資本として認識していないのが現状である[10]。

なお、社会には様々な制度が共存しており、財務諸表監査制度も一つの制度であり、様々な制度は相互補完的な関係を有していることは留意しておく必要がある。たとえば、財務諸表監査制度、監査役監査制度（あるいは監査委員会監査制度）、そして内部監査制度は相互補完的な関係を有しており、それゆえ株式会社の安定性をより一層確保することができるのである。

3.3　制度資本としての財務諸表監査の機能

それでは、制度資本としての財務諸表監査は、社会に対してどのような機能を持っているのであろうか。

従来、財務諸表監査は、基本的に、「保証機能」および「統制機能」という機能を持っているとされる[11]。

まず、保証機能[12] は、財務諸表監査が、監査意見を表明することを通じて、財務諸表の質（信頼性）を合理的な程度で保証する機能のことである。とりわけ、無限定適正意見は、財務諸表には全体として重要な虚偽表示が含まれていないことを意味している。この保証機能を果たすためには、下位の機能が必要である。この下位の機能が「批判機能」および「指導機能」である。批判機能は、監査人が、財務諸表が適正に表示しているかどうかを批判的に検証する機能である。この批判機能は、監査人が、不正および誤謬に起因する重要な虚偽表示を、職業的懐疑心を持って発見することである。他方、指導機能は、監査

人が、経営者に対して、会計処理上の欠陥や不備などにつき必要な助言・指導を行い、適正な財務諸表の作成に導く機能である。監査人は、この批判機能と指導機能を駆使して、上位の保証機能を果たすことができるのである。この保証機能は、財務諸表監査の基本機能である。なお、指導機能は、あくまでも批判機能を支える付随機能として位置づけられる。過度な指導機能は、二重責任の原則に抵触する危険性に繋がるのである。

実は、これまで保証機能は、投資者（株主を含む）を念頭に置いて議論がされてきた。より理論的に説明すれば、合理的な経済人である投資者（株主を含む)、いわゆる合理的な投資者を仮定して、保証機能が捉えられてきた。しかしながら、これまでの議論からも分かるように、保証機能は、合理的な投資者だけに関係するものではない。財務諸表監査制度は制度資本であるがゆえに、保証機能は、合理的な投資者ではなく、代替的な経済主体である社会の人々と関係するのである。保証機能は、社会の人々を念頭において議論をする必要がある。

次に、統制機能は、財務諸表監査が、財務諸表の作成・開示責任がある経営者に対して、適切な財務諸表を作成・開示させる動機を与える機能である。また、統制機能は、経営者に対して、適切な財務諸表の作成・開示するための管理プロセスである財務報告にかかわる内部統制を、適切に整備・運用させる動機を与える機能である。なぜこのような動機を経営者に与えることができるかといえば、経営者は、監査人によって財務諸表の質（信頼性）が検証されることを知っているからである。財務諸表監査は、経営者に対して抑止力になる。統制機能は、財務諸表の信頼性に関する統制として働くのである。なお、この統制機能は、付加的な機能であることに留意する必要がある。

加えて、財務諸表監査は、金融市場（とりわけ、株式市場）の安定性を確保するために必要とされる制度であり、一種の外部性を持っている。そのため、適切な監査結果は正の外部効果を持ち、監査の失敗は負の外部効果を持っている。つまり、財務諸表監査は、金融市場において一種の信頼醸成の機能を持っ

ているのである。また、財務諸表監査は、被監査会社（経営者）と社会（社会の人々）の信任関係の間に存在する財務諸表の質（信頼性）をめぐる潜在的な利害対立を緩和するために関与している。そのため、適切な監査結果は信任関係の強化に繋がり、監査の失敗は信任関係の脆弱化に繋がる。つまり、財務諸表監査は、被監査会社（経営者）と社会（社会の人々）の間の信頼を醸成する機能を持っているのである。このような意味で、財務諸表監査は、われわれの社会において一種の「信頼醸成機能」を持っていると考えられる。この信頼醸成機能は、保証機能および統制機能（とりわけ、保証機能）が十分に果たされてはじめて機能するものである。

以上をまとめると、制度資本としての財務諸表監査は、次の三つの機能を持っている。なお、これら三つの機能は、従来のように合理的な投資者ではなく、社会の人々、ひいては社会全体に対して直接的ないし間接的に機能するものである。

- 保証機能
- 統制機能
- 信頼醸成機能

これら三つの機能が円滑に機能するとき、制度資本としての財務諸表監査制度は、金融市場および株式会社の安定性を確保し、現在から将来にわたる長い期間を通じて、経済活動の円滑な機能とそれに伴う大きな社会的経済的な便益をもたらし、社会的安定性を維持することに貢献する。逆に、もし監査の失敗が生じた場合には、金融市場および株式会社の不安定性をもたらし、現在から将来にわたる長い期間を通じて、経済活動は円滑に機能しなくなり、それに伴い大きな社会的経済的な不利益をもたらし、社会的不安定性をもたらす一つの要因となる。

４．財務諸表監査制度の管理・運営

社会的安定性を確保するためには、制度資本としての財務諸表監査制度を安定的に維持しなければならない。それゆえ、財務諸表監査制度を適切に管理・運営することが重要となる。そこで、ここでは、制度資本としての財務諸表監査制度の管理・運営に関して考察していくこととする。

4.1　管理・運営の主体

社会的安定性の確保のために、制度資本としての財務諸表監査制度は、持続的かつ安定的に管理・運営される必要がある。もし財務諸表監査制度が持続的かつ安定的に管理・運営されなかった場合には、社会的不安定性をもたらすこととなる。制度資本は、社会的安定性あるいは社会的不安定性と深くかかわるため、私的な管理、運営ではなく、社会的な基準に基づく管理・運営が必要不可欠となる。そのため、制度資本としての財務諸表監査制度を、誰が管理・運営するかということが重要な問題となる。

制度資本の管理・運営は、国家の統治機構の一環として政府による行政的観点から行うものであってはならなく、また利潤を追求する市場的基準から行うものであってはならないとされる。制度資本は、各分野の職業専門家が中心となって、専門的知見に基づき、職業倫理にしたがって管理・運営されるものである（宇沢、2000a、2003 など）。なぜなら制度資本の管理・運営は、信任（fiduciary）の原則に基づき信任されているからであるとされる。

それでは、財務諸表監査制度の管理・運営に関してはどうであろうか。そこで、行政的観点、市場的基準、そして会計プロフェッションである監査人の三つの観点から検討を行っていくこととする。

まず、行政的観点から財務諸表監査制度の管理・運営を行った場合、よく言われるように、非効率な財務諸表監査が実施され、また監査人の使命感や責任感などは欠如し、さらに監査人の監査判断は画一的となり専門的判断が欠如す

るなどの問題が生じる。医療現場などと同様に、財務諸表監査現場が分からなければ、財務諸表監査制度を適切に管理・運営することは困難である。これらの点から、財務諸表監査制度の管理・運営は、行政的観点から行ってはならないと考えられる。

次に、利潤追求に基づく市場的基準から財務諸表監査制度の管理･運営を行った場合、監査人は被監査会社および社会の人々の利益よりも自己の利益の最大化を追求することになるため、適切な監査判断が下されず、監査の失敗が生じる可能性が高くなる。監査人が利潤追求の動機に基づいて行動した場合、職業倫理（とりわけ、独立性）は欠如し、被監査会社および社会に対して不利益をもたらすこととなる。そのため、財務諸表監査制度は、社会の信頼を失ってしまい、財務諸表監査制度の存在意義はなくなってしまう。これらの点から、財務諸表監査制度の管理・運営は、市場的基準からを行ってはならないと考えられる。

実際に、行政的観点と市場的基準のどちらにもかかわる事例が、アメリカで生じた。たとえば、1973 年に、連邦取引委員会（FTC）および司法省は、競争入札を禁止するアメリカ公認会計士協会（AICPA）の自主規制を独禁法違反に抵触するとした。そのため、AICPA は、訴訟を避けるために競争入札を解禁せざるをえなかった。その後、利潤追求に基づく市場的基準に晒されることとなった監査人は、自己の利益を最大化する必要が生じた。監査人は、価格競争の激化により、財務諸表監査業務だけでは十分に利益を確保できなくなり、コンサルティング業務などに進出した（Sunder、2003）。そして、監査人は、利益を確保するために、財務諸表監査業務とコンサルティング業務の同時提供を行ったのである。これらのことは、監査人を職業倫理（とりわけ、独立性）の欠如した行動へと導き[13]、財務諸表監査業務の品質を低下させることに繋がっていった。近年のエンロン事件およびワールド・コム事件などは、この 1973 年における規制緩和（競争促進政策）の帰結と言っても過言ではない。まさに、行政的観点も市場的基準も、財務諸表監査制度の管理・運営にはなじまないと

いえる。

やはり、他の制度資本と同様に、制度資本としての財務諸表監査制度は、会計プロフェッションである監査人が中心になって、専門的知見に基づき、職業倫理にしたがって管理・運営されるべきものである。

このことは、財務諸表監査の社会的関係（図２）からも理解できる。監査人と社会（社会の人々）の関係は信任関係である（栗濱、2010）[14]。監査人は、財務諸表監査を実施することを社会から信頼によって任されている。信任関係ゆえに、監査人は自動的に社会に対して倫理的義務である信任義務を負う。また、監査人と被監査会社（経営者）の関係は契約関係であるが、信任的要素を含んでいるため、監査人は、被監査会社に対してもある種の信任義務を負う。このような財務諸表監査の社会的関係から、監査人は、社会および被監査会社から財務諸表制度を管理・運営することを信頼によって任されることとなる。それゆえ、信任受託者である監査人は、独立かつ自立的な立場に立って、専門的知見に基づき、職業倫理に基づいて行動し、社会の利益および被監査会社の利益のために財務諸表監査制度の管理・運営の責任を負わなければならないのであ

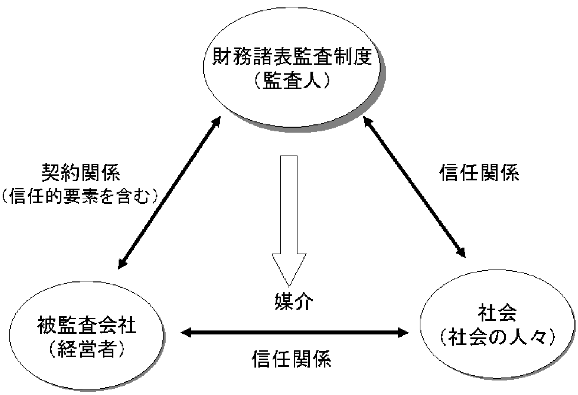

図２　財務諸表監査制度の社会的関係

る。このことは、財務諸表監査が、一種の外部性を持っていることからも理解できるのである。

したがって、財務諸表監査の管理・運営は、監査人が中心になって行うことが最も望ましいと考えられる。なお、監査人の資格は、会計士または監査法人に限定されているため、より具体的には、会計士または監査法人が中心になって財務諸表監査の管理・運営を行うことになる。また、後述するように、財務諸表監査の管理・運営は、会計士の団体である会計士協会が中心になって行われることとなる。

4.2　社会の視点

制度資本は、私的な管理を行った場合、社会的不安定性をもたらす一つの原因となるため、社会的基準に基づいて管理・運営されることが望まれている。つまり、社会的な基準に基づいて制度資本を管理・運営するには、代替的な経済主体である社会（社会の人々）の視点が必要とされる。

視点とは、一般的に、あるものを見る立場という意味で用いられている。しかしながら、視点は、この意味だけではない（宮崎・上野、1985）[15]。視点の活動は、固定化されているときには限定的な見えしか生み出さないが、視点の活動によって知覚や概念理解を生み出していく。つまり、視点の活動は事柄の認識を可能にしてくれる。また、視点は、人間についての認識と大きくかかわっているため、他者理解などにおいても大きな役割を果たしている。ある目的や意図などを持っている他者に視点を設定するとは、他者の持っている目的や期待などを推測し、仮想的な自己の内側に他者の目的や期待などを生成してみることである。それによって、さらにその他者の立場に立って他者が見ているように見ることも可能となるのである。

さて、財務諸表監査制度は、他の制度資本と同様に、会計プロフェッションである監査人が中心になって管理・運営されるが、その際には社会的基準に基づいて管理・運営されることが望まれている。実は、アメリカの財務諸表監査

訴訟の歴史は、財務諸表監査が監査人と被監査会社（経営者）の視点からだけで行われてきたことに対して警告を発し続け、社会的基準に基づいて判決が下されてきた。アメリカの裁判所は、監査人の視点および被監査会社の視点に加えて、社会の視点にも立って財務諸表監査制度を管理・運営することを求めてきたのである。

財務諸表監査制度の管理・運用に社会の視点が重要なことは、上述の図２の財務諸表監査の社会的関係から理解できる。監査人と社会の関係は信任関係であり、最優先の監査受益者は社会の人々である。そのため、監査人は、自己の利益はもちろんのこと、被監査会社の利益よりも社会（社会の人々）の利益を優先させて、財務諸表監査を実施し、財務諸表監査制度を管理・運用しなければならないのである。

だが、監査人は、顔の見えない（かつ監査報酬の支払人ではない）社会の人々の利益のために、財務諸表監査を適切に実施し、さらに財務諸表監査制度を適切に管理・運営しなければならないのである。そのため、監査人は、財務諸表監査を適切に実施するために、かつ財務諸表監査制度を適切に管理・運営するために、社会の視点を設定する必要がある。監査人は、社会の視点を設定することによって、社会の人々の持っている目的や期待などを推測し、仮想的な自己の内側に、社会の人々の目的や期待などを生成することができるのである。また、監査人は、社会の人々の立場に立って、社会の人々が見ているように財務諸表監査を見ることも可能となる。社会の視点の設定は、財務諸表監査を適切に実施するために、かつ財務諸表監査制度を適切に管理・運営するために必要不可欠である。この社会の視点の設定は、財務諸表監査制度が社会から信頼されるために必要なものである。

それでは、監査人が社会の視点を設定した場合には、社会の人々は、基本的に財務諸表監査制度に対してどのような期待を持っているかを推測してみる。社会の人々の目的が異なっていたとしても、財務諸表監査制度に対する基本的な期待は、社会の人々の間で同じであると考えられる。そして、社会の人々は、

これらの基本的な期待に基づいて財務諸表監査制度が信頼できるかどうかなどを判断していると考えられる。財務諸表監査制度に対する社会の人々の期待と財務諸表監査制度に対する社会の信頼は、密接に関係しているのである。そこで、社会の人々の財務諸表監査制度に対する期待を推測する上で、バーバー（Barber、1983）が提示した信頼の分類[16] を用いて推測する。なぜなら、バーバーの分類は、信頼する側が持つ期待に応じて信頼を三つに分類しているからである。このバーバーの分類を参考にすると、社会の人々は、財務諸表監査制度に対して、次のような基本的な期待を持っていると考えられる。

① 財務諸表監査制度が、存続し実現されているという期待

② 監査人が、財務諸表監査を実施する専門的知識・能力を持っているという期待

③ 監査人が、社会（社会の人々）に対して信任義務を果たすという期待

これらの期待は、社会の人々が抱く基本的な期待である。監査人は、社会の人々が抱くこれらの基本的な期待に応えるように、財務諸表監査制度を管理・運営しなくてはならない。逆に、これらの基本的な期待に応えることができなければ、財務諸表監査制度は社会から信頼を失うであろう。まさに、これらの基本的な期待に応えることが、社会の視点から財務諸表監査制度を管理・運営するということであり、財務諸表監査制度に対する社会の信頼にとっても重要なことである。もちろん、時代や社会状況などにより、社会の人々がさらなる期待をすることがありえるため、監査人は、そのような期待も生成できるように努め、そのような期待に応えることができるかどうかを十分に検討する必要がある。

以上の議論は、「期待ギャップ問題」とも深くかかわっている。期待ギャップ問題とは、財務諸表監査制度の機能および監査人の役割に対する監査人と社会の人々との認識のズレによって生じる問題である。この問題は、社会の視点の重要性を再認識させるものであり、この社会の視点および期待に関する議論を用いて理論的に考察することができるのである。

なお、②と③は監査人に対する期待であるが、①は財務諸表監査制度そのものに対する期待であるので、①の期待に応えるために、監査人は、②と③の期待に十分に応える必要がある。

4.3　自主規制の必要性

財務諸表監査制度を管理･運営するためには､その中心を担う会計プロフェッションである監査人が、代替的な経済主体である社会の人々の利益のために自主規制を行う必要がある。

そもそも、プロフェッションが社会から特権が認められそして高い社会的地位が与えられているのは、一つの理由として、プロフェッションとして社会の利益のために自主規制を行うからである(ジョイ､2005)。また､プロフェッションが高い社会的地位を与えられているのは、団体を形成し、団体として行動しているからである(石村､1969)。この団体を形成し団体として行動することは、プロフェッションの成立要件の一つである（Millerson、1964；友岡、1995)。それゆえ､プロフェッションが社会の利益ために適切な自主規制を行うためには、プロフェッション団体を形成し、団体自らの手で自主規制を行うことが必要とされるのである。

このことは､会計プロフェッションについても同じことがいえる。監査人は、会計プロフェッションであるので、他のプロフェッションと同様に、社会の利益のために自主規制を行う必要がある。この自主規制は、会計プロフェッションの団体である会計士協会が中心になって行われる。なぜなら､会計士協会は、その職種である財務諸表監査の社会的意義の確保のために、会員である監査人の行動などに規制を行う団体であるからである。歴史的に、会計プロフェッションの嚆矢である19世紀のイギリスの会計士は、会計プロフェッションとしての社会的地位を得るために、その団体である会計士協会を形成し、会計士協会自らの手で自主規制を行ってきた。会計士協会による自主規制は、現在においても脈々と受け継がれているのである。

また、監査人は、社会（社会の人々）から財務諸表監査の実施および財務諸表監査制度の管理・運営を信頼によって任されている。信任受託者である監査人は、独立かつ自立的な立場に立って、専門的知見に基づき、職業倫理に基づいて行動し、社会の利益および被監査会社の利益のために財務諸表監査制度の管理・運用の責任を負っている。そのため、財務諸表監査制度の適切な管理・運営を行うためには、会計士協会の手で監査人を規制するシステムを設ける必要がある。なぜなら、財務諸表監査制度の適切な管理・運営は、個々の監査人が財務諸表監査を適切に実施することによってはじめて成り立つので、全体として各監査人や各財務諸表監査業務の品質などを一定以上の水準に保つための規制システムが必要となるからである。

たとえば、アメリカのコーエン委員会報告書（AICPA, 1978、p. 141；鳥羽訳、1990、272-273頁）は、会計プロフェッションである監査人に対する規制システムとして、次の四つの要素があるとする。

① 会計プロフェッションに加入し、かつ継続して職業会計実務を行う権利を維持するために、必要な技量と専門能力について高い基準を設けること

② 業務上の目標として、また違反の有無を判断する手段として役立つ技術的基準および倫理的基準を設け公表すること

③ 技術的基準および倫理的基準の遵守を監視し、かつその遵守を促進するために、監査業務の品質管理についての方針および手続を定め、実施に移すこと

④ 法律、証券取引委員会（SEC）による規則もしくは会計プロフェッションが定めた基準に違反した業務または行為に対して、制裁を科すための有効な懲罰制度があること

会計プロフェッションである監査人に対する規制は、専門能力の基準、技術的基準と倫理基準、財務諸表監査業務の品質管理および懲罰制度という相互補完的な四つの要素を通じて行うことができるとされる。

これら四つの要素は、いわゆる財務諸表監査に関する基本的なルールである。上述したように、財務諸表監査制度はルールの束として捉えられる。つまり、専門能力の基準、技術的基準と倫理基準、品質管理および懲罰制度などのルールの束によって、財務諸表監査制度が構成されているのである。それゆえ、監査人が中心になって行う財務諸表監査制度の管理・運営とは、会計士協会がこれらのルールを適切に管理・運営することである。実際に、会計士協会は、程度の差こそあれ、これらルールに積極的にかかわっており、自主規制を行っているのである。そして、会員はこれらのルールを遵守することが義務づけられている。これらの四つの要素は、わが国では、日本公認会計士協会の倫理規則、監査の基準（監査基準およびその実務指針など）、品質管理の基準（品質管理基準およびその実務指針など）、そして公認会計士法などの財務諸表監査に関連する各諸法規などのルールが該当する[17]。なお、これらのルールには、会計士協会だけがかかわっているではなく、政府もかかわっているのである（政府に関しては、後述する）。

なかでも、自主規制の根幹をなすのが、監査人の職業倫理に関するルールである。監査人は、財務諸表監査を独占的に実施する権限を持っており、もし権限を濫用しあるいは任務を怠慢した場合には、社会（社会の人々）は甚大な損害を被る。監査人はこのような権限を持つ代わりに、倫理的義務を負っている。つまり、監査人は、社会に対して信任義務を負っており、被監査会社に対してもある種の信任義務を負っている。監査人は信任義務を果たすことが強く求められているのである。そのため、倫理的義務である信任義務を規則化した職業倫理規程が、会計士協会の自主規制規則として設けられているのである[18]。そして、会員は、職業倫理規程を遵守することが義務づけられている。ちなみに、わが国では、日本公認会計協会が倫理規則を設けている。

また、財務諸表監査業務の品質を管理し、監査の失敗を未然に防止することは、財務諸表監査制度の管理・運営において重要なことである。そのため、会計士協会自ら財務諸表監査業務の品質をチェックし、それを担保する仕組みを

設ける必要がある。なぜなら、そもそも社会の人々は、監査人に比べて財務諸表監査関する情報、知識および能力に大きなギャップを有しているため、財務諸表監査の品質に関して、それが適切であるかどうかの判断を行うことはできないからである。もし監査の失敗が生ずれば、財務諸表監査制度およびそれを管理・運営している監査人に対する社会的信頼は失墜することになる。

この品質チェックの方法には、アメリカ型とカナダ型がある。アメリカ型は、基本的に同僚である他の監査人が財務諸表監査の品質をチェックする、いわゆるピア・レビュー（peer review）方式である。一方、カナダ型は、自主規制団体である会計士協会が、財務諸表監査の品質をチェックする方式である。ちなみに、わが国は、後者のカナダ型を採用した品質管理レビュー制度を設けている。

以上のように、監査人は、社会から制度資本としての財務諸表監査制度を管理・運営することを信頼によって任されている以上、社会の利益ために自主規制を行う必要がある。この自主規制は、会計士協会が中心になって行われるものである。このことは、歴史的に、アメリカの公認会計士協会が、自主規制に対して重要な役割を担ってきたことからも理解できるのである。会計士協会は、制度資本としての財務諸表監査制度を安定的に維持するために、有効な自主規制を行う必要がある。

4.4　公的介入の必要性

制度資本は、社会を持続的かつ安定的に維持するために必要不可欠な社会的装置である。社会を安定的に維持するためには、制度資本そのものを安定的に維持する必要がある。それゆえ、制度資本の多くに公的介入が行われている。たとえば、アメリカにおいて、ニューディール政策の一環として、1933年銀行法（グラス・スティーガル法）が制定された。この銀行法は、1929年の世界大恐慌を引き起こした大きな原因が銀行の非倫理的かつ反社会的な投機行動にあったという反省に立って、制度資本としての銀行制度を法的整備する目的で

制定されたとされる。つまり、同法は、銀行制度を制度資本とみなして、その経営に社会的な基準を設け、経済活動が円滑に機能し、人々が安定した生活を営むために本来的な機能が十分に発揮できるような条件を整備しようとするものであった（宇沢、2000）。

同様に、ニューディール政策の一環として、1933 年証券取引法および 1934 年の証券取引所法（連邦証券二法）が制定された。この世界大恐慌の原因の一部が上場株式会社の財務諸表の不備および不完全に由来しており、こうした財務諸表の多くに、無限定の監査証明書が添付されていた[19]（岩田、1955）。こうした事態を受けて、金融市場の安定化を図り社会的安定性を確保するために、連邦証券二法において、上場株式会社に対して財務諸表監査が義務づけられたのである。つまり、制度資本としての財務諸表監査に対して法的な規制が行われたのである。そして、2002 年、エンロン事件およびワールド・コム事件などの一連の不正会計を受けて、企業改革法（サーベンス・オクスリー法；SOX 法）が制定され、その下で財務諸表監査制度に対してさらなる強化が行われたのである。

これまでの考察から分かるように、監査人は、社会から制度資本としての財務諸表監査制度の管理・運営を信頼によって任されている。この監査人と社会の信任関係において、監査人は、代替的な経済主体である社会の人々に対して自動的に信任義務を負う。監査人による信任義務が果たされる場合は、もちろんこの信任関係は維持される。しかしながら、倫理はわれわれにとって希少な資源であるため、監査人が信任義務を果たさなかった場合、社会の人々は甚大な損害を被ることとなる。信任関係を維持するためには、司法をはじめとする公的介入が必要なのである（岩井、1998；樋口、1999）。そのため、社会の人々の信頼を保護し、この信任関係を維持するためには、財務諸表監査を規制する法律などが必要となる。たとえば、わが国では、金融商品取引法、会社法、公認会計士法、それらに関係する各関連法規などが財務諸表監査を規制する法律として制定されている。

具体的には、たとえば、故意または過失による監査証明を行った場合、公認会計士法では、監査人に対する懲戒処分が設けられている。また、金融証券取引法では、刑事責任（共同正犯および従犯の罪）、民事責任（損害賠償責任）、行政処分（懲戒処分および不受理処分）が設けられている。さらに、会社法では、損害賠償責任が設けられている。そして、金融商品取引法の投資者に対する民事責任および会社法の第三者（いわゆるステークホルダー）に対する損害賠償責任においては、監査人が故意または過失がないことを自ら立証しなければならないという立証責任の転換が行われている。監査人の背信を防ぐためにどのようなルールが望ましいかを中心課題として、自主規制だけではなく、法的な規制が行われている。

また、法律ではないが、上述のコーエン委員会が示した、専門能力の基準、技術的基準と倫理基準、財務諸表監査業務の品質管理および懲罰制度のすべての要素に、会計士協会だけではなく、政府もかかわっている（AICPA、1978）。これも、監査人と社会の信任関係を維持することための公的介入の態様である。つまり、社会的な基準に基づいて財務諸表監査制度の管理・運営をすることが望ましいとされているため、自主規制に加えて、社会の人々のために政府による公的介入が必要とされている。ちなみに、政府は、社会そのものとして行動しているわけではなく、社会のために行動するものである。たとえば、わが国の場合には、監査基準や品質管理基準は、企業会計審議会（金融庁長官の諮問機関）が設定している[20]。そして、監査基準および品質管理基準に関する実務指針は、自主規制団体である日本公認会計士協会に委ねられている。

さらに、政府は、様々な種類の社会的共通資本の管理・運営が信任の原則に忠実に行われているかどうかをモニタリングするという役割を担っている（宇沢、2000）。政府は、社会そのものとして行動しているわけではなく、社会のために行動しており、社会のためにモニタリング活動を行う。なぜなら、代替的な経済主体である社会の人々は、社会的共通資本が適切に管理・運営されているかどうかをモニタリングすることが困難であるからである。このことは、制

度資本としての財務諸表監査制度においても同様である。つまり、政府は、制度資本としての財務諸表監査制度の管理・運用が信任の原則に忠実に行われているかどうかをモニタリングする役割を担っているのである。ちなみに、わが国では、そのモニタリングの役割を金融庁の一つの機関である公認会計士・監査審査会が担っている。

以上のように、制度資本としての財務諸表監査制度の管理・運営には、信任の視点から、会計士協会の自主規制に加えて、公的介入が必要とされる。公的介入を行うことにより、財務諸表監査制度をより一層安定的に維持させることができ、そして財務諸表監査の社会的関係をより安定化させることができる。財務諸表監査の社会的関係の安定化には、財務諸表監査制度の安定的な維持が必要不可欠である。そして、制度資本としての財務諸表監査制度が安定的に維持できれば、社会的安定性を確保にすることができるのである。ただし、4.1で考察したように、政府による行政的観点から財務諸表監査の管理・運用を行うことは適切ではない。つまり、過度な公的介入は好ましいことではない。あくまでも、制度資本としての財務諸表監査の管理・運用の中心は、会計プロフェッションである監査人およびその団体である会計士協会である。

5. おわりに

監査研究において、財務諸表監査制度の研究は重要なテーマである。財務諸表監査制度の研究をどの視点から行うかによって、財務諸表監査制度の見方は異なってくると考えられる。従来の財務諸表監査制度の研究は、それを規制する法律の面（法制度史も含む）から多く行われてきた。

本稿では、財務諸表監査制度とは何であるか、どのような特性を有しているか、そしてどのように管理・運営をしていくかなどの疑問に基づいて、従来とは異なる視点から財務諸表監査制度を検討し、その基礎理論を明らかにしてきた。これまでの考察により、以下のようなことが明らかになった。

⑴　財務諸表監査制度は、合理的な経済人とは異質な代替的な経済主体を前提としてはじめて成立し機能するのである。
⑵　財務諸表監査制度は、社会的な基準に基づいて形成された財務諸表監査に関するルールの束として捉えることができる。
⑶　財務諸表監査制度は、メゾレベルに位置づけられるものである。そのため、監査基準などのルールの変更は、ミクロレベルの経済主体の認知枠組みや行動に変化を及ぼし、その結果としてマクロレベルの社会・経済パフォーマンスに影響を与えることができる。また、財務諸表監査制度そのものの存在が、代替的な経済主体である社会の人々にとって節減効果となる。もちろん、メゾレベルにある財務諸表監査制度は、ミクロレベルとマクロレベルの両方のレベルによって影響を受け、変化することがある。
⑷　財務諸表監査制度は、制度資本とみなすことができる。財務諸表監査制度は、医療制度や金融制度などの他の制度資本と同様に、社会を持続的かつ安定的に維持するための社会的装置の一つであり、社会において必要不可欠な制度である。この制度資本としての財務諸表監査制度は、代替的な経済主体（なかでも、社会の人々）にとって必要不可欠なものである。
⑸　制度資本である財務諸表監査の機能は、保証機能、統制機能、そして信頼醸成機能の三つがある。従来では、保証機能と統制機能が指摘されていたが、財務諸表監査制度を制度資本とみなすことによって、その機能として信頼醸成機能を見出すことができるのである。
⑹　財務諸表監査制度の管理・運営は、政府による行政的観点や利潤追求に基づく市場的基準に基づいて行われるものではなく、会計プロフェッションである監査人が中心になって、専門的知見に基づき、職業倫理にしたがって行うべきものである。ただし、監査人は、顔の見えない相手である社会の人々のためにその管理・運営を行うため、社会の視点を設

定してその管理・運営を行うことが望ましいのである。

(7) 監査人は、社会から財務諸表監査制度を適切に管理・運営することを信頼によって任せされている以上、社会の利益のために自主規制を行う必要がある。この自主規制は、会計プロフェッションである監査人の団体である会計士協会が中心になって行われるものである。

(8) 制度資本としての財務諸表監査制度の管理・運営には、信任の視点から、会計士協会の自主規制に加えて、公的介入が必要とされる。公的介入を行うことにより、財務諸表監査制度をより一層安定的に維持させることができるのである。ただし、過度な公的介入は好ましくことではないのである。

このように、本稿で明らかにしたものは、従来の監査研究とは異なった新たな見方である。財務諸表監査制度の新たな見方は、それまで見えなかった財務諸表監査制度の意義や特性などをわれわれの前に照らしてくれるのである。本稿で明らかにしたことは、より望ましい財務諸表監査制度を考えていく際の基礎理論になる。

注

1 財務諸表監査が金融市場（とりわけ、株式市場）および株式会社において非常に重要な役割を果たしていることについては、次の論文により検討がされている。まず市場との関係に関しては、栗濱（2009b）、株式会社との関係に関しては、Kurihama（2007a、2007b）および栗濱（2004、2009a）を参照のこと。

2 西部（2004、2006）は、構築主義および操作主義とは異なる進化主義を新たに提案している。

3 合理的な経済人の詳しい分析は、栗濱（2009b）を参照。

4 代替的な経済主体に関する詳しい分析は、栗濱（2009b）を参照。

5 たとえば、会計研究では、旧制度派経済学、新制度派経済学、そして新制度派社会学のいずれかを用いて研究が行われている（藤井、2007）。旧制度派経済学は、ヴェブレンなどを代表とする学派であり、経済主体を合理的な経済人と仮定していない。新制度派経済学は、コースやウィリアムソンなどを代表とする学派であり、経済主体を合理的な経済人と仮定している。最後の新制度派社会学は、ディマジオ＆パウエルなどを代表とする学派で

あり、経済主体を合理的な経済人と仮定していない。ちなみに、後述するホジソンは、現代制度派経済学を宣言しているが、旧制度派経済学の系統に位置づけられると思われる。

6　メゾレベルには他に、言語、貨幣、信用、法律、会計、そして在庫などの制度が位置づけられている。ただし、残念ながら、監査制度はメゾレベルの議論で取り上げられておらず、位置づけられてもいないのが現状である。

7　最悪の場合、財務諸表監査制度そのものを不要とするかもしれない。

8　ここでの資本概念は、マルクスの資本概念とは異なるとされている。

9　制度資本の議論は、宇沢（1977、1990、2000a、2003 など）に負っている。

10　学問分野においても、財務諸表監査制度は、経済学者や社会学者などの制度議論の遡上にはほとんど挙がってこないのが現状である。たとえば、宇沢（1977、1990、2000a、2003 など）でも、制度資本の多様な構成要素として財務諸表監査制度は取り上げられていない。

11　他に、補助的機能として「情報提供機能」がある。情報提供機能は、監査人が投資者に注意を喚起することを目的に、監査報告書に情報を追記するものとされている。ただし、財務諸表監査制度の大前提である「二重責任の原則」上、当然、この情報提供の意味は非常に限定的なものである。そのため、監査人が自ら新たな情報を作成し、社会の人々に提供することはできない。

12　Wallace（1980）では、財務諸表監査の機能は、財務諸表のノイズ（誤謬に関連）とバイアス（不正に関連）を縮減することであると提唱している。これらの機能は、保証機能に含まれる機能であり、なかでも保証機能の下位機能である批判機能と関係しているものと捉えることができると考えられる。

13　たとえば、アメリカのコーエン委員会報告書（AICPA、1978）は、競争入札が監査人の独立性を損なうと指摘している。他方、デ・アンジェロ（De Angelo、1981）は、競争は、監査人の独立性を損なうこととは直接的な因果関係はないと論証している。また、ローネン（Ronen、2002）は、市場メカニズムを利用した財務諸表改革を考え、財務諸表保険（financial statement insurance）を提唱している。この財務諸表保険は、歪んだ財務諸表の発行を効果的にチェックできる市場指向の解決法であるとされる。財務諸表保険により、監査人の利益相反問題は解決でき、実質的にも監査人の独立性は確保できるとする。このローネンの議論は、財務諸表監査に市場競争メカニズムを導入することを推奨する議論であり、本稿とは異なる考え方である。

14　監査人と社会の信任関係および監査人の信任義務に関する詳しい議論は、栗濱（2010）を参照。

15　以後、視点に関する議論は、宮崎・上野（1985）に負っている。

16　バーバーの信頼の分類は、①自然秩序および道徳的社会秩序が存続し実現されるという期待、②社会的関係および社会制度の中で関係する相手が、役割を果たす能力を持っているという期待、③関係する相手が信任された責務や責任を果たすこと、つまり、場合によっては関係する相手が自己の利益よりも他人（相手）の利益を優先するという義務を果たすことに対する期待、である。

17　これら四つの要素と監査の基準や倫理規則などがそのまま一対一対応をしているわけではないことは分かるであろう。たとえば、監査基準は、専門能力の基準、技術的基準や倫理的基準、そして品質管理基準にかかわっているのである。

18　ただし、忠実義務に関する規定化は十分には行われていないのが現状である。
19　May（1926）によれば、1920年代に入ると次第に監査証明書を添付する慣習が普及するようになり、1926年の調査では、ニューヨーク証券取引所（NYSE）への上場株式会社の90％以上が、会計士による財務諸表の監査を受けていたとされる。なお、この当時は、監査報告書（independent auditor s' report）ではなく、監査証明書（certificate）であった。この無限定の監査証明書は、現代の無限定適正意見監査報告書に近い意味を有している。また、現代の監査報告書の原型は、1932年から1934年にかけて、アメリカ会計士協会（AIA）とNYSEとの間に交わされた往復書簡においてはじまったとされている。
20　管理・運営以外に、ルールを誰が設定するかという設定権限に関する議論がある。つまり、この議論は、会計プロフェッションである監査人に設定権限があるのか、それともそれ以外の機関（政府など）に設定権限があるのかというものである。アメリカの場合は、これまでAICPAが監査基準の設定権限を持っていたが、エンロン事件およびワールド・コム事件以後、SECの管理下に設定された準公的機関であるPCAOBが、SEC監査に関する監査基準の設定権限を持つこととなった。

参考文献

American Accounting Association（AAA）（1973）, Committee on Basic Auditing Concepts, *A Statement of Basic Auditing Concepts*, AAA.（青木茂男監訳・鳥羽至英訳『基礎的監査概念』国元書房、1982年。）

American Institute of Certified Public Accountants（AICPA）（1978）, The Commission on Auditor's Responsibility, *Report, Conclusions, and Recommendations*, AICPA.（鳥羽至英訳『財務諸表監査の基本的枠組み』白桃書房、1990年。）

Barbar, B.（1983）, *The Logic and Limit of Trust*, Rutgers University Press.

Brewster, M.（2003）, *Unaccountable: How The Accounting Profession Forfeited A Public Trust*, Jon Willy & Sons.（友岡賛監訳・山内あゆ子訳『会計破綻』税務経理協会。）

Carmichael, D. R.（2004）, "The PCAOB and the Social Responsibility of the Independent Auditor", *Accounting Horizons*, Vol. 18 No. 2, pp. 127-133.

De Angelo, L. E.（1981）, "Auditor Independence, 'Low Balling' and Disclosure Regulation," *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 3, pp. 113-127.

DiMaggio, P. J. and Powell, W. W.（1983）, "The Iron Cage Revisited: Institutional Isomorphism and Collective Rationality in Organizational Fields", *American Sociological Review*, Vol. 48 No. 2, pp. 147-160.

Frankle, T.（1983）, "Fiduciary Law", *California Law Review*, Vol. 71, pp. 795-836.

Gaa, J. C.（1994）, *The Ethical Foundations in Public Accounting*, Research Monograph Number 22. Vancouver: CGA-Canada Research Foundation.（瀧田輝己訳『会計倫理』同文館出版、2005年。）

Hodgson, G. M.（1988）, *Economics and Institutions: A Manifesto for a Modern Institutional*

Economics, Polity Press.（八木紀一郎・訳『現代制度学派』名古屋大学出版会、1997年。）
Hodgson, G. M. (2006), "What are Institutions?", *Journal of Economic Issue*, Vol. XL No. 1, pp. 1-25.
Hopwood, A. G. and Miller, P. (1994), *Accounting as Social and Institutional Practice*, Cambridge University Press.（岡野浩・國部克彦・柴健次訳『社会・組織を構築する会計』中央経済社、2003年。）
Kurihama, R. (2007a), "Role for Auditing in Corporate Social Responsibility and Corporate Governance: under New corporate view", *Corporate Ownership and Control*, Vol. 5 Issue1, pp. 109-119.
Kurihama, R. (2007b), "A New Perspective on Relationship between Corporate Governance and Auditing", *Issues in Social and Environmental Accounting*, Vol. 1 No. 2, pp. 258-275.
Mautz, R. K. and Sharaf, H. A. (1961), *The Philosophy of Auditing*, American Accounting Association.（近澤弘治監訳・関西監査研究会訳『監査理論の構造』中央経済社、1984年。）
May, G. O. (1926), "Corporate Publicity and the Auditors", *Journal of Accountancy*, Vol. 42 No. 5, pp. 321-326.
O'Reilly, V. M., McDonnell, P. J., Winograd, B. N., Gerson, J. S., and Jaenicke, H. R. (1998), *Montogomery's Auditing*, Twelfth Edition, John Wiley & Sons.（中央監査法人訳『モントゴメリーの監査論［第2版]』中央経済社、1998年。）
Parker, R. H. (1986), *The Development of the Accountancy Profession in Britain to the Early Twentieth Century*, Academy of Accounting Historians.（友岡賛・小林麻衣子訳『会計士の歴史』慶応義塾大学出版会、2005年。）
Ronen, J. (2002), "Post-Enron Reform: Financial Statement Insurance, and GAAP Re-visited", *Stanford Journal of Law, Business, and Finance*, Vol. 8 No. 1, pp. 39-68.
Stephen, E. L. ed. (1978), *Ethics in the Accounting Profession*, John Willy & Sons.
Sunder, S. (2002), "Regulatory Competition Among Accounting Standards Within and Across International Boundaries", *Journal of Accounting and Public Policy*, Vol. 21 No. 3, pp. 219-234.
Sunder, S. (2003), "Rethinking the Structure of Accounting and Auditing", *Indian Accounting Review*, Vol. 7 No. 1, pp. 1-15.
Veblen, T. (1909), "The Limitation of Marginal Utility", *Journal of Political Economy*, Vol. 17 No. 9, pp. 620-636.
Wallace, W. A. (1980), "The Economic Role of the Audit in Free and Regulated Markets", In Wallace, *Auditing Monographs* (1986), 2nd Edition, reprinted by PWS—Kent Publishing.（千代田邦夫・百合野正博・伊豫田隆俊・盛田良久・朴大栄訳『ウォーレスの監査論』同文舘、1991年。）
Watts, R. L. and Zimmerman, J. L. (1986), *Positive Accounting Theory*, Prentice—Hall.（須田一幸訳『実証理論としての会計学』白桃書房、1991年。）
石村善助（1969）『現代のプロフェッション』至誠社。
伊豫田隆俊（2003）『制度としての監査システム』同文舘出版。
岩井克人（1998）「身分から契約と“信任”へ」『日本経済新聞』１月１日。

岩井克人（2000）『二十一世紀の資本主義』筑摩書房。
岩田巌（1955）『會計原則と監査基準』中央経済社。
ヴェブレン（1998）『有閑階級の理論』高哲男訳、ちくま学芸文庫。
宇沢弘文（1977）『近代経済学の再検討―批判的展望―』岩波新書。
宇沢弘文（1990）『経済解析―基礎篇―』岩波書店。
宇沢弘文（2000a）『社会的共通資本』岩波新書。
宇沢弘文（2000b）『ヴェブレン』岩波書店。
宇沢弘文（2003）『経済解析―展開篇―』岩波書店。
日下部與市（1975）『監査基準逐条詳解』中央経済社。
栗濱竜一郎（2004a）「CSR（企業の社会的責任）と新たな監査観―企業と社会の信頼関係構築に向けて―」『税経通信』Vol. 59 No. 11、155-164 頁。
栗濱竜一郎（2004b）「期待ギャップ問題と監査理論」『JICPA ジャーナル』Vol. 59 No. 11、155-164 頁。
栗濱竜一郎（2006）「監査理論と信任関係―利用者の視点から―」『進化経済学会論集』第 10 集、417-426 頁。
栗濱竜一郎（2009a）「コーポーレート・ガバナンスと監査の新たな関係―今日の CSR の議論を通して―」『愛知経営論集』（愛知大学）第 159 号、61-92 頁。
栗濱竜一郎（2009b）「市場観と財務諸表監査―財務諸表監査の新たな見方―」『愛知経営論集』（愛知大学）第 160 号、37-77 頁。
栗濱竜一郎（2010）「監査人の職業倫理の基礎理論―会計プロフェッションおよび財務諸表監査の社会的関係の視点から―」『愛知経営論集』（愛知大学）第 161 号、29-71 項。
澤邊紀生（1999）『国際金融規制と会計制度』晃洋書房。
塩沢由典（1997a）『複雑さの帰結』NTT 出版。
塩沢由典（1997b）『複雑系経済入門』生産性出版。
高田正淳（1974a）「監査の基本問題の研究（三）」『會計』第 105 巻第 3 号、177-185 頁。
高田正淳（1974b）「監査の基本問題の研究（四）」『會計』第 105 巻第 4 号、95-102 頁。
高田正淳（1974c）「監査の基本問題の研究（五）」『會計』第 105 巻第 5 号、125-134 頁。
高田正淳（1979）『最新監査論』中央経済社。
千代田邦夫（1994）『アメリカ監査論（第 2 版）』中央経済社。
鳥羽至英（1994）『監査基準の基礎（第 2 版）』白桃書房。
鳥羽至英（2000）『財務諸表監査の基礎理論』国元書房。
鳥羽至英（2009a）『財務諸表監査―理論と制度―（基礎篇）』国元書房。
鳥羽至英（2009b）『財務諸表監査―理論と制度―（展開篇）』国元書房。
友岡賛（1995）『近代会計制度の成立』有斐閣。
西部忠（2004）「進化主義的な制度設計」『進化経済学のフロンティア』西部忠編著、日本評論社、3-34 頁。
西部忠（2006）「進化主義的な制度設計におけるルールと制度」『経済学研究』（北海道大学）、第 56 巻第 2 号、133-146 頁。
八田進二（2004）『公認会計士倫理読本―国際的な信認を得るための鍵―』財経詳報社。
八田進二（2009）『会計プロフェッションと監査』同文館出版。

樋口範雄（1999）『フィデュシャリー［信認］の時代』有斐閣。
樋口範雄（2008）『続・医療と法を考える』有斐閣。
藤井秀樹（2007）『制度変化の会計学―会計基準のコンバージェンスを見すえて―』中央経済社。
宮崎清孝・上野直樹（1985）『視点』東京大学出版会。
ルーマン, N.（1990）『信頼―社会的な複雑性の縮減メカニズム―』大庭健・正村俊之訳、勁草書房。
山浦久司（2008）『会計監査（第５版）』中央経済社。
山岸俊男（1998）『信頼の構造―こころと社会の進化ゲーム―』東京大学出版会。

〔論　説〕

A Smoothing Newton Method by Fischer-Burmeister Function with an outside parameter for Second-Order-Cone Complementarity Problems

Nobuko Sagara

Abstract The second-order cone complementarity problem (SOCCP) is an important class of problems containing a lot of optimization problems. The SOCCP can be transformed into a system of nonsmooth equations. To solve this nonsmooth system by a smoothing Newton method, there are mainly two ways to use the Chen-Mangasarian class, that is, the smoothed natural residual and the smoothed Fischer-Burmeister function. Fukushima, Luo and Tseng (2001) [13] studied practical and concrete theories and properties of the above smoothing functions for SOCCP. Recently, a practical computational method using the natural residual function to solve SOCCP was given by Hayashi, Yamashita and Fukushima (2005) [14]. In this paper we propose an algorithm to solve SOCCP by using the Fischer-Burmeister function instead of the natural residual function in [14].

1. Introduction

In this paper we consider the second-order cone complementarity problem (SOCCP), which is to find $(x, y) \in R^n \times R^n$ such that

$$x \in \mathcal{K}, \qquad y \in \mathcal{K}, \qquad \langle x, y \rangle = 0, \qquad y = f(x) \tag{1.1}$$

where $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ denotes the Euclidean inner product, f is a continuously differentiable function from R^n to R^n, and $\mathcal{K} \subset R^n$ is the Cartesian product of second-order cones, that is, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ with $n = n_1 + \cdots + n_m$ and $\mathcal{K}^{n_i}$ is the n_i-dimensional second-order cone defined by

$$\mathcal{K}^{n_i} := \left\{ (z_1, z_2) \in R \times R^{n_i - 1} \quad | \quad \|z_2\|_2 \le z_1 \right\} \subset R^{n_i}.$$

The KKT conditions for any second-order cone program (SOCP) is written as the SOCCP. The theoretical research on primal-dual path-following algorithms for solving second-order cone programs is done by Tsuchiya and others [1, 2, 17, 22, 23]. On the other hand, the research on SOCCP may be found in [6, 7, 8, 9, 10, 14, 13, 18]. The theory of solving SOCCP by smoothing functions including natural residual and Fischer-Burmeister functions was studied by Fukushima et al. [13]. Recently, using this result, the practical computational method using the natural residual function was given by Hayashi et al. [14]. In this paper, we propose an algorithm to solve SOCCP by using the Fischer-Burmeister function instead of the natural residual.

In datail, Fukushima, Luo and Tseng [13] showed that the "min" function and Fischer-Burmeister function for the NCP can be extended to the SOCCP by using the Jordan algebra. Also, the SOCCP function associated with the min function is called the natural residual function. Furthermore, Fukushima et al. [13] constructed smoothing functions for those functions and analyzed the properties of their Jacobians. Hayashi et al. [14] proposed a smoothing method based on the smoothed natural residual function, and showed its global and quadratic convergence. On the other hand, Chen, Sun and Sun [6] proposed another smoothing method based on natural residual function that is called the CHKS(Chen-Harker-Kanzow-Smale) smoothing function in X.Chen [5]. Following the idea of Qi, Sun and Zhou [21], Chen et al. [6] treated a smoothing parameter as a variable, in contrast with Hayashi et al. [14]. Moreover, they gave global and quadratic convergence of their method, which follows results of Qi et al. [21].
This paper is organized as follows. In Section 2, we review some concepts of semismoothness and some properties of the spectral factorization with respect to SOC, which will be used in the subsequent analysis. Also, we give a merit function by means of Fischer-Burmeister function for the SOCCP. In Section 3, we introduce a smoothing function with the smoothed Fischer-Burmeister function. In Section 4, we have the analysis that we get information how to update for an outside parameter "t" on the practical computation. In section 5, we propose an algorithm for solving the SOCCP and discuss its convergence properties, and then we give some numerical experiences of the proposed method.
Throughout this paper, we let R_+ and R_{++} denote the nonnegative and positive reals.

2. Some Preliminaries

2.1 Semismoothness and strong semismoothness

Semismoothness is a generalized concept of the smoothness, which was originally introduced by Mifflin [15] for functionals, and extended to vector-valued functions by Qi and Sun [20].

Definition 2..1 *[12] Let $H : R^n \to R^m$ be a locally Lipschitzian function. Then H is differentiable almost everywhere by Rademacher's Theorem [11]. Let D_H be the set of differentiable points of H. The B(ouligant)-subdifferential and Clarke subdifferential of H at x is respectively defined by*

$$\begin{aligned} \partial_B H(x) &:= \{lim_{\hat{x}\to x} \nabla H(\hat{x}) \mid \hat{x} \in D_H\} \\ \partial H(x) &:= co\, \partial_B H(x) \end{aligned}$$

where $\nabla H(x)$ is the Jacobian of H at x and $co\ S$ is the convex hull of S.

Note that if H is continuously differentiable at x, then $\partial H(x) = \{\nabla H(x)\}$.

Definition 2..2 *[12] A directionally differentiable and locally Lipschitizian function $H : R^n \to R^m$ is said to be semismooth at x if*

$$H'(x; d) - V^T d = o(\|d\|)$$

for any sufficiently small $d \in R^n \backslash \{0\}$ and $V \in \partial H(x+d)$, where

$$H'(x; d) := lim_{\tau \downarrow 0} \left(H(x + \tau d) - H(x)\right)/\tau$$

is the directional derivative of H at x along the direction d. In particular, if $o(\|d\|)$ can be replaced by $O(\|d\|^2)$, then function H is said to be strongly semismooth.

2.2 Jordan algebra associated with SOCCP

We first recall the spectral factorization of a vector in R^n asoociated with $\mathcal{K}^n$. Let $z = (z_1,\ z_2) \in R \times R^{n-1}$. Then z can be decomposed as

$$z = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} \tag{2.1}$$

where λ_1, λ_2 and $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ are the spectral values and the associated spectral vectors of z given by

$$\lambda_i = z_1 + (-1)^i \|z_2\|, \tag{2.2}$$

$$u^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1,\ (-1)^i \frac{z_2}{\|z_2\|}\right) & \text{if } z_2 \neq 0 \\ \frac{1}{2}\left(1,\ (-1)^i w\right) & \text{if } z_2 = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

for $i = 1, 2$, with w being any vector in R^{n-1} satisfying $\|w\| = 1$. If $z_2 \neq 0$, the decomposition (2.1) is unique.

The Jordan product of $x = (x_1,\ x_2) \in R \times R^{n-1}$ and $y = (y_1,\ y_2) \in R \times R^{n-1}$ is defined as

$$x \cdot y = (x^T y,\ y_1 x_2 + x_1 y_2). \tag{2.4}$$

We will write z^2 to mean $z \cdot z$ and write $x + y$ to mean the usual componentwise addition of vectors x and y. We define $z^{1/2}$ as

$$z^{1/2} = \left(s,\ \frac{z_2}{2s}\right), \quad \text{where } s = \sqrt{\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \|z_2\|^2}\right)/2}. \tag{2.5}$$

Note that $(z^{1/2})^2 = z^{1/2} \cdot z^{1/2} = z$. Moreover, for any z we define the symmetric matrix L_z as

$$L_z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2^T \\ z_2 & z_1 I \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Property 2.1 For any $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$, let λ_1, λ_2 and $u^{(1)}, u^{(2)}$ be the spectral values and the associated spectral vectors at x. Then the following hold.

1. $x \in \mathcal{K}^n \Longleftrightarrow 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$ and $x \in \mathrm{int}\mathcal{K}^n. \Longleftrightarrow 0 < \lambda_1 \le \lambda_2$

2. $x^2 = \lambda_1^2 u^{(1)} + \lambda_2^2 u^{(2)} \in \mathcal{K}^n$.

3. If $x \in \mathcal{K}^n$, then $x^{1/2} = \sqrt{\lambda_1} u^{(1)} + \sqrt{\lambda_2} u^{(2)} \in \mathcal{K}^n$.

2.3 Merit function

In order to construct a merit function for SOCCP (1.1), it is convenient to introduce a function $\hat{\Phi} : R^n \times R^n \to R^n$ satisfying

$$\hat{\Phi}(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{K}, \qquad y \in \mathcal{K}, \qquad \langle x, y \rangle = 0. \tag{2.7}$$

By using such a function, we define $\hat{H} : R^n \times R^n \to R^{2n}$ by

$$\hat{H}(x, y) := \begin{pmatrix} \hat{\Phi}(x, y) \\ f(x) - y \end{pmatrix}.$$

It is obvious that SOCCP (1.1) is equivalent to the equation $\hat{H}(x, y) = 0$. Moreover, we define function $\hat{\Psi} : R^n \times R^n \to R$ by

$$\hat{\Psi}(x, y) := \frac{1}{2} \parallel \hat{H}(x, y) \parallel^2 = \frac{1}{2} \parallel \hat{\Phi}(x, y) \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel f(x) - y \parallel^2 . \tag{2.8}$$

Then, it is easy to see that $\hat{\Psi}(x, y) \ge 0$ for any $(x, y) \in R^n \times R^n$, and that $\hat{\Psi}(x, y) = 0$ if and only if (x, y) is a solution of (1.1).

For a general SOCCP on $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$, since

$$x \in \mathcal{K}, \quad y \in \mathcal{K}, \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^i \in \mathcal{K}^{n_i}, \quad y^i \in \mathcal{K}^{n_i}, \quad \langle x^i, y^i \rangle = 0 \quad (i = 1, ..., m), \tag{2.9}$$

where $x = (x^1, \cdots, x^m)$ and $y = (y^1, \cdots, y^m)$, we can define

$$\hat{\Phi}(x, y) := \begin{pmatrix} \hat{\phi}^1(x^1, y^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}^m(x^m, y^m) \end{pmatrix},$$

where $\hat{\phi}^i : R^{n_i} \times R^{n_i} \to R^{n_i}$ is any function satisfying

$$\hat{\phi}^i(x^i, y^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^i \in \mathcal{K}^{n_i}, \quad y^i \in \mathcal{K}^{n_i}, \quad \langle x^i, y^i \rangle = 0 \tag{2.10}$$

for $i = 1, ..., m$. Fukushima et al. [13] showed that (2.10) holds for the Fischer-Burmeister function $\phi^i_{FB} : R^{n_i} \times R^{n_i} \to R^{n_i}$ defined by

$$\phi^i_{FB}(x^i, y^i) := x^i + y^i - ((x^i)^2 + (y^i)^2)^{1/2}.$$

Using this function, we define the function $\Phi_{FB} : R^n \times R^n \to R^n$ by

$$\Phi_{FB}(x, y) := \begin{pmatrix} \phi^1_{FB}(x^1, y^1) \\ \vdots \\ \phi^m_{FB}(x^m, y^m) \end{pmatrix}$$

and $H_{FB} : R^n \times R^n \to R^{2n}$ by

$$H_{FB}(x, y) := \begin{pmatrix} \Phi_{FB}(x, y) \\ f(x) - y \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Then, we can construct a merit function $\Psi_{FB} : R^n \times R^n \to R$ for SOCCP (1.1) by

$$\Psi_{FB}(x, y) := \frac{1}{2} \parallel H_{FB}(x, y) \parallel^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \parallel \phi^i_{FB}(x^i, y^i) \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel f(x) - y \parallel^2 .$$

3. Smoothing functions and its properties

Since H_{FB} is not differentiable, we cannot apply conventional methods such as the steepest descent method and Newton's method that use the gradient of the function. Therefore, we consider the smoothing function that is a generalization of the proposal of Kanzow [16] for the Fischer-Burmeister function with an outside parameter t:

$$\phi_t(x, y) := x + y - (x^2 + y^2 + 2t^2 e)^{1/2}, \tag{3.1}$$

where $e = (1, 0, ..., 0)^T$. Notice that $\phi_t(x, y) = 0$ if and only if $x \in \text{int}\, \mathcal{K}^n, y \in \text{int}\, \mathcal{K}^n$ and $x \cdot y = t^2 e$.
In the remainder of the paper, we assume $\mathcal{K} = \mathcal{K}^n$. Then we can rewrite SOCCP (1.1) as follows: Find $(x, y) \in R^n \times R^n$ such that

$$x \in \mathcal{K}^n, \qquad y \in \mathcal{K}^n, \qquad \langle x, y \rangle = 0, \qquad y = f(x). \tag{3.2}$$

The assumption $\mathcal{K} = \mathcal{K}^n$ is only for simplicity of presentation. The subsequent analysis may be extended to the general case $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ without difficulty. We define functions H_{FB} and Ψ_{FB} by

$$\begin{aligned} H_{FB}(x, y) &:= \begin{pmatrix} \phi_{FB}(x, y) \\ f(x) - y \end{pmatrix}, \qquad (3.3) \\ \Psi_{FB}(x, y) := \frac{1}{2} \parallel H_{FB}(x, y) \parallel^2 &= \frac{1}{2} \parallel \phi_{FB}(x, y) \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel f(x) - y \parallel^2, \end{aligned}$$

where $\phi_{FB}(x,y) = x + y - (x^2 + y^2)^{1/2}$.

3.1 Smoothing functions

For a nondifferentiable function $h : R^n \to R^m$, we consider a function $h_t : R^n \to R^m$ with a parameter $t > 0$ that has the following properties:

(a) h_t is differentiable for any $t > 0$.

(b) $\lim_{t \downarrow 0} h_t(x) = h(x)$ for any $x \in R^n$.

Such a function h_t is called a smoothing function of h. Instead of handling the nonsmooth equation $h(x) = 0$ directly, the smoothing method solves a family of smoothed subproblems $h_t(x) = 0$ for $t > 0$, and obtain a solution of the original problem by letting $t \downarrow 0$. It can be shown [13] that $\phi_t(x,y)$ may be regarded as a smoothing function of the Fischer-Burmeister function ϕ_{FB}.
Recall that $\phi_t(x,y) = 0$ if and only if $x \in \text{int}\ \mathcal{K}^n, y \in \text{int}\ \mathcal{K}^n, x \cdot y = t^2 e$. From Proposition 5.1 in [13], we have the following relations

$$\begin{aligned} \|\phi_{t_2}(x,y) - \phi_{t_1}(x,y)\| &\le \sqrt{2}(t_1 - t_2) \quad \text{for} \quad t_1 > t_2 > 0 \\ \|\phi_t(x,y) - \phi_{FB}(x,y)\| &\le \sqrt{2}t \quad \text{for} \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

In this paper, we treat the parameter t as a positive real variable that be controled from outside. Specifically, for the function $H_{FB}(x,y)$, we consider the following smoothing function by putting $F(x,y) = f(x) - y$:

$$H_t(x,y) := \begin{pmatrix} \phi_t(x,y) \\ F(x,y) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

The merit function for this smoothing function Ψ is given by

$$\Psi_t(x,y) := \frac{1}{2}\left\{\|\phi_t(x,y)\|^2 + \|F(x,y)\|^2\right\}. \tag{3.6}$$

3.2 The smoothed Fischer-Burmeister function

We next give the explicit expressions of the Jacobian $H_t(w)$. When we define $w^t = w^t(x,y) = x^2 + y^2 + 2t^2 e = (w_1^t, w_2^t) \in R \times R^{n-1}$, we have

$$w_1^t = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2t^2 \quad \text{and} \quad w_2^t = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2), \tag{3.7}$$

where $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R \times R^{n-1}$. The spectral factorization of w^t is as follws:

$$w^t = \lambda_1(w^t)u^{(1)} + \lambda_2(w^t)u^{(2)},$$

where $\lambda_1(w^t), \lambda_2(w^t)$ and u_1^t, u_2^t are the spectral value and the associated spectral vectors of w^t given by

$$\lambda_i(w^t) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2t^2 + 2(-1)^i \|x_1 x_2 + y_1 y_2\| \tag{3.8}$$

and

$$u_i^t = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1, (-1)^i \frac{w_2^t}{\|w_2^t\|}\right) & \text{if} \quad w_2^t \neq 0 \\ \frac{1}{2}\left(1, (-1)^i \nu\right) & \text{if} \quad w_2^t = 0, \end{cases}$$

for $i = 1, 2$, with ν being any vector in R^{n-1} satisfing $\|\nu\| = 1$. Since $w^t \in \mathcal{K}^n$, from Property 2.1 $u^t = (w^t)^{1/2}$ is given by

$$u^t = \sqrt{\lambda_1(w^t)}u^{(1)} + \sqrt{\lambda_2(w^t)}u^{(2)}. \tag{3.9}$$

Now we consider the Jacobian of H_t with $t > 0$.

In the rest of the paper, we use the following notation:

$$\begin{aligned} w = w(x,y) = x^2 + y^2 = (w_1, w_2), & \qquad w^t = w^t(x,y) = x^2 + y^2 + 2t^2 e = (w_1^t, w_2^t), \\ u = u(x,y) = w(x,y)^{1/2} = (u_1, u_2), & \qquad u^t = u^t(x,y) = (w^t)^{1/2} = (u_1^t, u_2^t). \end{aligned}$$

Proposition 3.1 *Let $w^t = (w_1^t, w_2^t) = x^2 + y^2 + 2t^2 e \in R \times R^{n-1}$ and $\lambda_1(w^t), \lambda_2(w^t)$ be in (3.8). If $t > 0$, then the function H_t is continuously differentiable on R^{2n}, and its Jacobian is given by*

$$\nabla H_t(x,y) = \begin{bmatrix} I - L_x L_{u^t}^{-1} & \nabla f(x) \\ I - L_y L_{u^t}^{-1} & -I \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

where

$$L_{u^t}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{w_1^t}} I & \text{if} \quad w_2^t = 0 \\ \begin{bmatrix} b^t & c^t \bar{w}_2^T \\ c^t \bar{w}_2 & a^t I + (b^t - a^t)\bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{bmatrix} & \text{if} \quad w_2^t \neq 0 \end{cases}$$

with

$$\bar{w}_2 = w_2 / \|w_2\| = w_2^t / \|w_2^t\|$$

and

$$a^t = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(w^t)} + \sqrt{\lambda_2(w^t)}}, \quad b^t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1(w^t)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(w^t)}}\right), \quad c^t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2(w^t)}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1(w^t)}}\right).$$

Proof. It follows from Corollary 5.4 of [13].

q.e.d

We propose a smoothing Newton method for solving $H_t(x, y) = 0$. In order to obtain the Newton step, nonsingularity of the Jacobian of H_t is important. To establish the nonsingularity of the Jacobian of H_t, we consider the following rank and monotonicity assumptions on $\nabla F(x, y, \zeta)$. Our case is $F(x, y, \zeta) = f(x) - y$. The two assumption (6.2) and (6.3) in [13] are necessary. Since our case $F(x, y, \zeta) = f(x) - y$ does not include ζ, we don't need to consider about (6.2) in [13]. Thus, the assumption (6.3) in [13] says that $\nabla f(x)$ is positive semidefinite, and hence, f is monotone if x is allowed to be any point in R^n.

Proposition 3.2 *For each $t \neq 0$ and $(x, y) \in R^{2n}$ satisfying the assumption (6.3) in [13], that is,*

$$(u, v) \in R^n \times R^n, \quad \nabla F(x, y)^T(u, v) = 0 \Longrightarrow u^T v \geq 0,$$

the matrix $\nabla H_t(x, y)$ given (3.10) is nonsingular.

3.3 Jacobian consistency

In this section, we consider Jacobian consistency, which was introduced by Chen,Qi and Sun [4]

Lemma 3.1 *[[19], Lemma 3.2] For any $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R \times R^{n-1}$ with $w = (w_1, w_2) = x^2 + y^2 \in bd\, \mathcal{K}^n$, we have*

$$x_1^2 = \|x_2\|^2, \ \ y_1^2 = \|y_2\|^2, \quad x_1 y_1 = x_2^T y_2, \quad x_1 y_2 = y_1 x_2. \tag{3.11}$$

In addition, if $w_2 \neq 0$, then $\|w_2\| = w_1 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2(x_1^2 + y_1^2) = 2(\|x_2\|^2 + \|y_2\|^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\|w\|$ and

$$\begin{aligned} x_1 w_2 = \|w_2\| x_2 = w_1 x_2, \qquad x_2^T w_2 = x_1 \|w_2\| = w_1 x_1, \\ y_1 w_2 = \|w_2\| y_2 = w_1 y_2, \qquad y_2^T w_2 = y_1 \|w_2\| = w_1 y_1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Also, from the results, we obtain by putting $\bar{w}_2 = w_2 / \|w_2\|$,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2^T \bar{w}_2 = 0, \qquad x_2 - x_1 \bar{w}_2 = 0, \\ y_1 - y_2^T \bar{w}_2 = 0, \qquad y_2 - y_1 \bar{w}_2 = 0. \end{aligned}$$

Note that from (3.11) $w = x^2 + y^2 = 0$ implies $(x, y) = (0, 0)$.

Now we define the following three sets

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x,y) \in R^{2n} \ \mid \ x^2+y^2 \in \text{int}\,\mathcal{K}^n\right\}, \\ S_2 &= \left\{(x,y) \in R^{2n} \ \mid \ x^2+y^2 \in \text{bd}\,\mathcal{K}^n, \ \ (x,y) \neq (0,0)\right\}, \\ S_3 &= \left\{(x,y) \in R^{2n} \ \mid \ (x,y) = (0,0)\right\}. \end{aligned}$$

Clearly, we see that $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = R^{2n}$.

Lemma 3.2

$$J_H^0(x,y) := lim_{t\to 0}\nabla H_t(x,y) = \begin{bmatrix} I-J_x & \nabla F(x) \\ I-J_y & -I \end{bmatrix}$$

where

$$J_x = \begin{cases} L_x L_u^{-1} & \textit{if } (x,y)\in S_1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} L_x \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I-3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} & \textit{if } (x,y)\in S_2 \\ 0 & \textit{if } (x,y)\in S_3 \end{cases}$$

and

$$J_y = \begin{cases} L_y L_u^{-1} & \textit{if } (x,y)\in S_1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} L_y \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I-3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} & \textit{if } (x,y)\in S_2 \\ 0 & \textit{if } (x,y)\in S_3 \end{cases}$$

with $\bar{w}_2 = w_2/\|w_2\|$.

Proof. We only might prove that $\lim_{t\to 0} L_x L_{u^t}^{-1} = J_x$ and $\lim_{t\to 0} L_y L_{u^t}^{-1} = J_y$.

- The case $(x,y)\in S_1$. From the fact that $\lim_{t\to 0} L_{u^t}^{-1} = L_u^{-1}$, the results are clearly.
- The case $(x,y)\in S_2$. It follows from $w = x^2+y^2 \in \text{bd}\,\mathcal{K}^n$ that we have $\|x\|^2+\|y\|^2 = 2\|x_1x_2+y_1y_2\| \neq 0$. Therefore, we have

$$\lambda_1(w^t) = \|x\|^2+\|y\|^2-2\|x_1x_2+y_1y_2\|+2t^2 = 2t^2 \tag{3.13}$$

$$\lambda_2(w^t) = \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x_1x_2+y_1y_2\|+2t^2 = 2t^2+2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3.14}$$

By using the technique in the proof of Proposition 3.1 in [19], we can rewite $L_{u^t}^{-1}$ as

$$L_{u^t}^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1(w^t)}}\begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}_2^T \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2(w^t)}}\begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & \frac{4\sqrt{\lambda_2(w^t)}}{\sqrt{\lambda_1(w^t)}+\sqrt{\lambda_2(w^t)}}(I-\bar{w}_2\bar{w}_2^T)+\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Now we define the first and second terms by $L_1(w^t)$ and $L_2(w^t)$ respectively. It follows from (3.13) and (3.14), that we have $\lambda_1(w^t) \to 0$ and $\lambda_2(w^t) \to 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ as $t \to 0$. Therefore,we have

$$\lim_{t\to 0} L_2(w^t) = \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}$$

Since from $x^2 + y^2 \in \mathrm{bd}\,\mathcal{K}^n$ and Lemma 3.1, we have $x_1 - x_2^T\bar{w}_2 = 0$ and $x_2 - x_1\bar{w}_2 = 0$,

$$\begin{aligned} L_x L_1(w^t) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1(w^t)}} \begin{bmatrix} x_1 - x_2^T\bar{w}_2 \\ x_2 - x_1\bar{w}_2 \end{bmatrix} [1 \quad -\bar{w}_2^T] \\ &= 0. \end{aligned}$$

In a similar way, we see $L_y L_1(w^t) = 0$. Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} L_x L_{u^t}^{-1} &= \lim_{t\to 0}(L_x L_1(w^t) + L_x L_2(w^t)) \\ &= \lim_{t\to 0} L_x L_2(w^t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}} L_x \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

and

$$\lim_{t\to 0} L_y L_{u^t}^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}} L_y \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}.$$

- The case $(x, y) \in S_3$. From $w^t = 2t^2 e$, we have $L_{u^t}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}t} I$, which implies

$$\begin{aligned} L_x L_{u^t}^{-1} &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}t} I = 0, \\ L_y L_{u^t}^{-1} &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}t} I = 0. \end{aligned}$$

Therefore, $J_x = J_y = 0$.

q.e.d.

Lemma 3.3

$$\partial_B H_{FB}(x, y) \ni \begin{bmatrix} I - V_x & \nabla F(x) \\ I - V_y & -I \end{bmatrix}$$

where

$$V_x = \begin{cases} L_x L_u^{-1} & \text{if } (x,y) \in S_1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} L_x \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} \pm \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}_2^T \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} & \text{if } (x,y) \in S_2 \\ \pm I & \text{if } (x,y) \in S_3 \end{cases} \quad (3.16)$$

and

$$V_y = \begin{cases} L_y L_u^{-1} & \text{if } (x,y) \in S_1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} L_y \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} & \text{if } (x,y) \in S_2 \\ \pm I & \text{if } (x,y) \in S_3 \end{cases} \quad (3.17)$$

Proof. Since the Fisher-Burmeister is continuously differentiable on $(x,y) \in S_1$, it suffices to prove the cases $(x,y) \in S_2$ and $(x,y) \in S_3$.

Now we consider the point $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon e, y)$ where $\epsilon \neq 0$ is sufficiently small. In this proof, we use the next notations,

$$\begin{aligned} w &= (w_1, w_2) = x^2 + y^2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2,\ 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right), \\ \hat{w} &= (\hat{w}_1, \hat{w}_2) = \hat{x}^2 + \hat{y}^2, \quad \hat{u} = (\hat{w})^{1/2}, \quad \tilde{w}_2 = \hat{w}_2 / \|\hat{w}_2\|, \\ \hat{\lambda}_i &= \lambda_i(\hat{w}) = \hat{w}_1 + (-1)^i \|\hat{w}_2\| \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

By simple calculation, we have

$$\hat{w}_1 = w_1 + 2\epsilon x_1 + \epsilon^2, \quad \hat{w}_2 = w_2 + 2\epsilon x_2, \quad (3.18)$$

$$\hat{\lambda}_i = w_1 + 2\epsilon x_1 + \epsilon^2 + (-1)^i \|w_2 + 2\epsilon x_2\| \quad (i = 1, 2). \quad (3.19)$$

- The case $(x,y) \in S_2$. Since $(x,y) \in S_2$, it follows from Lemma 3.1 that

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_2\|^2 &= \|w_2 + 2\epsilon x_2\|^2 \\ &= \|w_2\|^2 + 4\epsilon x_2^T w_2 + 4\epsilon^2 \|x_2\|^2 \\ &= w_1^2 + 4\epsilon x_1 w_1 + 4\epsilon^2 x_1^2 \\ &= (w_1 + 2\epsilon x_1)^2. \end{aligned}$$

Because $w_1 > 0$ and ϵ is sufficiently small, we have

$$\|\hat{w}_2\| = w_1 + 2\epsilon x_1. \quad (3.20)$$

Therefore from (3.19), we have

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= w_1 + 2\epsilon x_1 + \epsilon^2 - \|w_2 + 2\epsilon x_2\| = \epsilon^2 > 0 \\ \hat{\lambda}_2 &= w_1 + 2\epsilon x_1 + \epsilon^2 + \|w_2 + 2\epsilon x_2\| = 2(w_1 + 2\epsilon x_1) + \epsilon^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

So that $\hat{\lambda}_1 > 0$ implies that H_{FB} is continuously differtiable at $\hat{z}$.

Next we consider $\lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{x}} L_{\hat{u}}^{-1}$ and $\lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{y}} L_{\hat{u}}^{-1}$. We can rewrite $L_{\hat{u}}^{-1}$ as

$$L_{\hat{u}}^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{\lambda}_1}} \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{w}_2^T \\ -\tilde{w}_2 & \tilde{w}_2\tilde{w}_2^T \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{\hat{\lambda}_2}} \begin{bmatrix} 1 & \tilde{w}_2^T \\ \tilde{w}_2 & \frac{4\sqrt{\hat{\lambda}_2}}{\sqrt{\hat{\lambda}_1}+\sqrt{\hat{\lambda}_2}}(I - \tilde{w}_2\tilde{w}_2^T) + \tilde{w}_2\tilde{w}_2^T \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Now we define the first and second term by $\hat{L}_1$ and $\hat{L}_2$ respectively like previously. In the similar way of the proof of Lemma 3.2, we have

$$\lim_{\epsilon\to\pm 0} \hat{L}_2 = \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

since $\lim_{\epsilon\to\pm 0}\hat{w}_2 = \lim_{\epsilon\to\pm 0}(w_2 + 2\epsilon x_2) = w_2$, so that $\lim_{\epsilon\to\pm 0}\tilde{w}_2 = \lim_{\epsilon\to\pm 0}\hat{w}_2/\|\hat{w}_2\| = w_2/\|w_2\| = \bar{w}_2$. It follows from the definition of $\hat{L}_1$ that

$$\begin{aligned} L_{\hat{x}}\hat{L}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\hat{\lambda}_1}} \begin{bmatrix} x_1 + \epsilon & x_2^T \\ x_2 & (x_1+\epsilon)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{w}_2 \end{bmatrix} [1 \quad -\tilde{w}_2^T] \\ &= \frac{1}{2|\epsilon|} \left\{ L_x \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{w}_2 \end{bmatrix} [1 \quad -\tilde{w}_2^T] + \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{w}_2 \end{bmatrix} [1 \quad -\tilde{w}_2^T] \right\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Here, we consider the first term:

$$L_x \begin{bmatrix} 1 \\ -\tilde{w}_2 \end{bmatrix} = x \circ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{x_2^T\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} \\ x_2 - \frac{x_1\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

since by using $\|\hat{w}_2\| = w_1 + 2\epsilon x_1$, $\hat{w}_2 = w_2 + 2\epsilon x_2$ and Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{x_2^T\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} &= \frac{1}{\|\hat{w}_2\|}\left\{x_1\|\hat{w}_2\| - x_2^T\hat{w}_2\right\} \\ &= \frac{1}{\|\hat{w}_2\|}\left\{x_1(w_1 + 2\epsilon x_1) - x_2^T(w_2 + 2\epsilon x_2)\right\} \\ &= \frac{1}{\|\hat{w}_2\|}\left\{x_1 w_1 - x_2^T w_2 + 2\epsilon(x_1^2 - \|x_2\|^2)\right\} = 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{x_1^T\hat{w}_2}{\|\hat{w}_2\|} &= \frac{1}{\|\hat{w}_2\|}\left\{x_2\|\hat{w}_2\| - x_1\hat{w}_2\right\} \\ &= \frac{1}{\|\hat{w}_2\|}\left\{x_2(w_1 + 2\epsilon x_1) - x_1(w_2 + 2\epsilon x_2)\right\} \\ &= \frac{1}{\|\hat{w}_2\|}\left\{w_1 x_2 - x_1 w_2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Therefore, we obtain

$$\lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{x}}\hat{L}_1 = \lim_{\epsilon\to\pm 0} \frac{\mathrm{sgn}(\epsilon)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{w}_2^T \\ -\tilde{w}_2 & \tilde{w}_2\tilde{w}_2^T \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}_2^T \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}.$$

Consequently, we have from the above results,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{x}} L_{\hat{u}}^{-1} &= \lim_{\epsilon\to\pm 0}(L_{\hat{x}}\hat{L}_1 + L_{\hat{x}}\hat{L}_2) \\
&= \lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{x}}\hat{L}_1 + \lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{x}}\hat{L}_2 \\
&= \pm\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}_2^T \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} L_x \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- The case $(x, y) \in S_3$. Because $(x, y) = (0, 0)$, we have $\hat{w} = \epsilon^2 e \in \text{int}\,\mathcal{K}^n$, and hence ∇H is continuously differentiable on $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$.From the fact that $\hat{u} = (\hat{w})^{1/2} = |\epsilon|e$, we have

$$L_{\hat{x}} L_{\hat{u}}^{-1} = \text{sgn}(\epsilon) I$$

which implies

$$\lim_{\epsilon\to\pm 0} L_{\hat{x}} L_{\hat{u}}^{-1} = \pm I$$

q.e.d

Definition 3..1 *Suppose that $\mathcal{F}$ is a continuous function and $\partial\mathcal{F}$ exists. Let $\mathcal{F}_u$ with $u \geq 0$ be a smoothing function. We say that $\mathcal{F}_u$ satisfies* **the Jacobian consistency** *if*

$$lim_{u\to 0}\, dist\,(\nabla\mathcal{F}_u(x), \partial\mathcal{F}(x)) = 0 \quad \textit{for any } x,$$

where $dist(X, S) = min\{\|X - Y\|,\ Y \in S\}$.

Theorem 3.1 *The smoothed Fischer-Burmeister function H_t satisfies the Jacobian consistency property.*

Proof. In Lemma 3.3, for the case S_2, let

$$V_x^{(i)} = L_x J + (-1)^i Z \quad \text{for } i = 1, 2$$

where $J := \frac{1}{2\sqrt{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & 4I - 3\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}$ and $Z := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\bar{w}_2^T \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix}$.

Next,let

$$W^{(i)} = \begin{bmatrix} I - V_x^{(i)} & \nabla F(x) \\ I - V_y & -I \end{bmatrix}.$$

Then, from Lemma 3.3 we have $W^{(i)} \in \partial_B H_{FB}(x, y)$ for $i = 1, 2$. Therefore, $W := (W^{(1)} + W^{(2)})/2 \in \partial H_{FB}(x, y)$. From Lemma 3.2, we can prove the Jacobian consistency of H_t.

q.e.d

4. Update of an outside parameter

For updating of an outside parameter t, we need to estimate $\mathrm{dist}(\nabla H_t(x,y), \partial H_{FB}(x,y))$ in terms of t more preceisely, because we want to inform how small we may choose a parameter t.

Lemma 4.1 *Let $\alpha, \beta, \gamma \in R$ and $w \in R^{n-1}$ with $\|w\| = 1$. Let*

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \gamma w^T \\ \gamma w & \alpha I + (\beta - \alpha) w w^T \end{bmatrix}$$

Then eigenvalues of the symmetric matrix A are α of multiplicity $n-2$ and $\beta \pm \gamma$.

Proof. If let $\delta := \beta - \alpha$, A becomes

$$G = \begin{bmatrix} \beta & \gamma w^T \\ \gamma w & \alpha I + \delta w w^T \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - G) &= \begin{vmatrix} \lambda - \beta & -\gamma w^T \\ -\gamma w & (\lambda - \alpha) I - \delta w w^T \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - \beta)|(\lambda - \alpha) I - \delta w w^T - \gamma^2 (\lambda - \beta)^{-1} w w^T| \\ &= (\lambda - \beta)|(\lambda - \alpha)[I - (\lambda - \alpha)^{-1}(\delta + \gamma^2(\lambda - \beta)^{-1}) w w^T]| \\ &= (\lambda - \beta)(\lambda - \alpha)^{n-1}|I - (\lambda - \alpha)^{-1}(\delta + \gamma^2(\lambda - \beta)^{-1}) w w^T| \\ &= (\lambda - \beta)(\lambda - \alpha)^{n-2}[(\lambda - \alpha) - (\delta + \gamma^2(\lambda - \beta)^{-1})] \\ &= (\lambda - \beta)(\lambda - \alpha)^{n-2}[(\lambda - \alpha - \delta) - \gamma^2(\lambda - \beta)^{-1}] \\ &= (\lambda - \alpha)^{n-2}((\lambda - \beta)(\lambda - \alpha - \delta) - \gamma^2), \end{aligned}$$

since $\det(I + uv^T) = 1 + u^T v$ for $u,\ v \in R^n$ and then $\|w\| = 1$ and $|tA| = t^p|A|$ for $A \in R^{p \times p}$ and $t \in R$. Therefore,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - \alpha)^{n-2}[(\lambda - \beta)(\lambda - \alpha - \beta + \alpha) - \gamma^2] \\ &= (\lambda - \alpha)^{n-2}[(\lambda - \beta)^2 - \gamma^2] \\ &= (\lambda - \alpha)^{n-2}(\lambda - (\beta + \gamma))(\lambda - (\beta - \gamma)). \end{aligned}$$

q.e.d

In the following lemma, we describe the property of some functions used in the proof of the next proposition.

Lemma 4.2 *Let $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Then the functions $g_1,\ g_2 : (-\lambda_1, \infty) \to R$ defined by*

$$g_1(\tau) \ := \ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1+\tau}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1+\tau}+\sqrt{\lambda_2+\tau}} \tag{4.1}$$

$$g_2(\tau) \ := \ \frac{2}{\sqrt{\lambda_1+\tau}+\sqrt{\lambda_2+\tau}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2+\tau}} \tag{4.2}$$

are decreasing in $\tau > -\lambda_1$. In particular, if $\lambda_1 = \lambda_2$, then g_1 and g_2 are identically rero for all $\tau > -\lambda_1$. If $\lambda_1 < \lambda_2$, then g_1 and g_2 are strictly decreasing , and hence $g_1(0) > g_1(\tau)$, and $g_2(0) > g_2(\tau)$ for all $\tau > 0$.

Proof. The case $\lambda_1 = \lambda_2$ is evident. So, we let $\lambda_1 < \lambda_2$. We prove our assertion only for g_1. The proof for g_2 is similarly. We have

$$\begin{aligned} g_1'(\tau) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(\lambda_1+\tau)^{3/2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1+\tau}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2+\tau}}}{(\sqrt{\lambda_1+\tau}+\sqrt{\lambda_2+\tau})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1+\tau)(\lambda_2+\tau)}(\sqrt{\lambda_1+\tau}+\sqrt{\lambda_2+\tau})} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\lambda_1+\tau)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1+\tau}}\left(\frac{2}{\sqrt{(\lambda_1+\tau)(\lambda_2+\tau)}+\lambda_2+\tau} - \frac{1}{\lambda_1+\tau}\right) \\ &< \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1+\tau}}\left(\frac{2}{\sqrt{(\lambda_1+\tau)(\lambda_1+\tau)}+\lambda_1+\tau} - \frac{1}{\lambda_1+\tau}\right) = 0 \end{aligned}$$

for all $\tau > -\lambda_1$, where the last inequality follows from $\lambda_1 + \tau < \lambda_2 + \tau$. q.e.d

Proposition 4.1 *Let $z = (x, y) \in R^{2n}$. The z is used temporarily in this proposition. For any $t > 0$, we have*

$$dist(\nabla H_t(z), \partial H_{FB}(z)) \leq \Gamma(z)[h_0(z) - h_t(z)] \tag{4.3}$$

where $\Gamma(z) := \|(L_x\ \ L_y)^T\|$ and $h_t : R^{2n} \to R_+$ be a function defined by

$$h_t(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1+2t^2}} & \text{if } z \in S_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{t+\sqrt{t^2+w_1}} & \text{if } z \in S_2 \\ 0 & \text{if } z \in S_3 \end{cases}$$

where $w_1 \in R$ is defined as $(w_1, w_2) = x^2 + y^2$ previously. Here $dist(X, S)$ denotes $min\{\|X - Y\| | Y \in S\}$.

Proof.

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(\nabla H_t(z), \partial H_{FB}(z)) &= \min\{\|\nabla H_t(z) - V\| \mid V \in \partial H_{FB}(z)\} \\ &\leq \|\nabla H_t(z) - J_H^0(z)\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \begin{bmatrix} I - L_x L_{u^t}^{-1} & \nabla F(x) \\ I - L_y L_{u^t}^{-1} & -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I - J_x & \nabla F(x) \\ I - J_y & -I \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} J_x - L_x L_{u^t}^{-1} & 0 \\ J_y - L_y L_{u^t}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \|J_x - L_x L_{u^t}^{-1}\| + \|J_y - L_y L_{u^t}^{-1}\|.
\end{aligned}
$$

Case 1. $z \in S_1$: Let $G := L_u^{-1} - L_{u^t}^{-1}$. Since $J_x = L_x L_u^{-1}$ and $J_y = L_y L_u^{-1}$ from Lemma 3.2, we have

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} J_x - L_x L_{u^t}^{-1} \\ J_y - L_y L_{u^t}^{-1} \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \begin{matrix} L_x L_u^{-1} - L_x L_{u^t}^{-1} \\ L_y L_u^{-1} - L_y L_{u^t}^{-1} \end{matrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \end{bmatrix} (L_u^{-1} - L_{u^t}^{-1}) \right\| \\
&\leq \left\| \begin{matrix} L_x \\ L_y \end{matrix} \right\| \left\| (L_u^{-1} - L_{u^t}^{-1}) \right\| = \Gamma(z)\|G\|,
\end{aligned}
$$

where $\Gamma(z) := \left\| \begin{matrix} L_x \\ L_y \end{matrix} \right\|$ and $G := L_u^{-1} - L_{u^t}^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
\|G\| = \|L_u^{-1} - L_{u^t}^{-1}\| &= \begin{bmatrix} b^0 - b^t & (c^0 - c^t)\bar{w}_2^T \\ (c^0 - c^t)\bar{w}_2 & (a^0 - a^t)I + [(b^0 - b^t) - (a^0 - a^t)]\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta & \gamma\bar{w}_2^T \\ \gamma\bar{w}_2 & \alpha I + (\beta - \alpha)\bar{w}_2\bar{w}_2^T \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

where $\alpha := a^0 - a^t$, $\beta := b^0 - b^t$ and $\gamma := c^0 - c^t$. From Lemma 4.1, eigenvalues of G are α and $\beta \pm \gamma$.

$$
\begin{aligned}
\beta + \gamma &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}} > 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta - \gamma &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}} > 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a^0 - a^t \\
&= \frac{2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1^t} + \sqrt{\lambda_2^t}} \\
&= \frac{\sqrt{\lambda_1^t} - \sqrt{\lambda_1} + (\sqrt{\lambda_2^t} - \sqrt{\lambda_2})}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})(\sqrt{\lambda_1^t} + \sqrt{\lambda_2^t})} > 0.
\end{aligned}
$$

Thus, the G is a positive definite matrix with the norm $\|G\| = \max\{\alpha, \beta \pm \gamma\}$. We have the relation $\beta - \gamma \geq \alpha \geq \beta + \gamma$. We first show that $\beta - \gamma \geq \alpha$ holds.

$$\begin{aligned}
\beta - \gamma - \alpha &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}} - \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1^t} + \sqrt{\lambda_2^t}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1^t} + \sqrt{\lambda_2^t}} \right) \\
&= g_1(0) - g_1(2t^2) \geq 0,
\end{aligned}$$

since the last inequarity follows by Lemma 4.2. We next show that $\alpha \geq \beta + \gamma$.

$$\begin{aligned}
\alpha - (\beta + \gamma) &= \frac{2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1^t} + \sqrt{\lambda_2^t}} - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda_1^t} + \sqrt{\lambda_2^t}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^t}} \right) \\
&= g_2(0) - g_2(2t^2) \geq 0,
\end{aligned}$$

since the last inequarity follows by Lemma 4.2. From those results, we have $\beta - \gamma \geq \alpha \geq \beta + \gamma$ and hence

$$\|G\| = \beta - \gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^t}} = h_0(z) - h_t(z).$$

Case 2. $z \in S_2$: In this case, $2w_1 = \lambda_2 > \lambda_1 = 0$. In the proof of Lemma 3.2, we defined $L_{u^t}^{-1} = L_1(w^t) + L_2(w^t)$. And we got $L_x L_1(w^t) = 0$, $L_y L_1(w^t) = 0$, $L_x L_1(w) = 0$, $L_y L_1(w) = 0$ since $\lim_{t \to 0} L_1(w^t) = L_1(w)$ and $\lim_{t \to 0} L_2(w^t) = L_2(w)$. Thus, since we have $L_y L_{u^t}^{-1} = L_y L_2(w^t)$ and $L_x L_{u^t}^{-1} = L_x L_2(w^t)$,

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{array}{c} J_x - L_x L_{u^t}^{-1} \\ J_y - L_y L_{u^t}^{-1} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} L_x L_2(w) - L_x L_2(w^t) \\ L_y L_2(w) - L_y L_2(w^t) \end{array} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \end{bmatrix} (L_2(w) - L_2(w^t)) \right\| = \Gamma(z)\|G\|,
\end{aligned}$$

where $G = L_2(w) - L_2(w^t)$. Here, by using $a^0 = 2/\sqrt{\lambda_2}$ and (3.15),

$$\begin{aligned}
G &= L_2(w) - L_2(w^t) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} [1\ \bar{w}_2^T] + a^0 \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & I - \bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_2(w^t)}} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} [1\ \bar{w}_2^T] + a^t \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & I - \bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(w^t)}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} [1\ \bar{w}_2^T] + (a^0 - a^t) \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & I - \bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{bmatrix} \\
&= \beta \begin{bmatrix} 1 & \bar{w}_2^T \\ \bar{w}_2 & \bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & I - \bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \beta & \beta \bar{w}_2^T \\ \beta \bar{w}_2 & \alpha I + (\beta - \alpha)\bar{w}_2 \bar{w}_2^T \end{array} \right],$$

where $\alpha := a^0 - a^t$ and $\beta := (1/2)(1/\sqrt{\lambda_2} - 1/\sqrt{\lambda_2^t})$. Again by Lemma 4.1, eigenvalues of G are α and $\beta \pm \beta$ i.e., 0 and 2β. By the same reason as in Case 1, we have $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. Thus, G is a positive semidefinite matrix with norm $\|G\| = \max\{\alpha,\ 2\beta\}$. We show that $\alpha > 2\beta$ holds. By using $2w_1 = \lambda_2 > \lambda_1 = 0$,

$$\begin{aligned} \alpha = a^0 - a^t &= \frac{2}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda_1(w^t)} + \sqrt{\lambda_2(w^t)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2w_1}} - \frac{2}{\sqrt{2t^2} + \sqrt{2t^2 + 2w_1}} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^2 + w_1}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\beta &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(w^t)}} = \frac{1}{\sqrt{2w_1}} - \frac{1}{\sqrt{2t^2 + 2w_1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + w_1}} \right). \end{aligned}$$

From this result, we have

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\alpha - 2\beta) &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^2 + w_1}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + w_1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{2}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^2 + w_1}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + w_1}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^2 + w_1}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + w_1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^2 + w_1}} \right) > 0, \end{aligned}$$

where the last inequality follows since each term is positive for $t > 0$. Hence, we have $\|G\| = \alpha = \sqrt{2}/\sqrt{w_1} - \sqrt{2}/(t + \sqrt{t^2 + w_1}) = h_0(z) - h_t(z)$.

Case 3. $z \in S_3$. In Lemma 3.2, we have $J_x = 0$ and $J_y = 0$ on S_3. And in the proof of Lemma 3.2, we have $L_x L_{u^t}^{-1} = 0$ and $L_y L_{u^t}^{-1} = 0$ on S_3. Thus, we obtain

$$\left\| \begin{array}{c} J_x - L_x L_{u^t}^{-1} \\ J_y - L_y L_{u^t}^{-1} \end{array} \right\| = 0.$$

q.e.d

Proposition 4.2 *Let $z = (x, y) \in R^{2n}$. And let $\gamma(z)$ be any function such that $\Gamma(z) \le \gamma(z)$. For a given $\delta > 0$, we have*

$$\exists \bar{t}(z, \delta) > 0 : \qquad dist(\nabla H_t(z), \partial H_{FB}(z)) < \delta \tag{4.4}$$

for any $t > 0$ *such that* $0 < t < \bar{t}(z,\delta)$*. The* $\bar{t}(z,\delta)$ *is defined by*

$$\bar{t}(z,\delta) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \delta}{\sqrt{2(\gamma(z)^2 - \lambda_1 \delta^2)}} & \textit{for } z \in S_1 \quad \textit{and} \quad \delta < \gamma(z)/\sqrt{\lambda_1} \\ \frac{w_1 \delta}{2\sqrt{\gamma(z)(2\gamma(z) - \delta^2\sqrt{2w_1})}} & \textit{for } z \in S_2 \quad \textit{and} \quad \delta < 2\gamma(z)/\sqrt{2w_1} \\ \infty & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. We put $\gamma := \gamma(z)$ and $\bar{t} := \bar{t}(z,\delta)$ for simplicity.

Case 1. $z \in S_1$. If $\delta \geq \gamma/\sqrt{\lambda_1}$, then $h_0(z) - h_t(z) < h_0(z) = 1/\sqrt{\lambda_1} \leq \delta/\gamma$. Let $\delta < \gamma/\sqrt{\lambda_1}$. Since $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$ for all $a > b > 0$, we have

$$\begin{aligned} h_0(z) - h_t(z) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 + 2t^2}} = \frac{\sqrt{\lambda_1 + 2t^2} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1 + 2t^2}} \\ &< \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1 + 2t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1/t^2 + 2}} \\ &< \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1/\bar{t}^2 + 2}}, \end{aligned}$$

since the last function is a strictly increasing one for $t > 0$. Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} h_0(z) - h_t(z) &< \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1/\bar{t}^2 + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1\left(\frac{2(\gamma^2 - \lambda_1\delta^2)}{(\lambda_1\delta)^2}\right) + 2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\frac{\gamma^2}{\lambda_1\delta^2}}} = \frac{\delta}{\gamma}. \end{aligned}$$

Case 2. $z \in S_2$. If $\delta \geq 2\gamma/\sqrt{2w_1}$, then

$$\begin{aligned} h_0(z) - h_t(z) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{w_1}} - \frac{\sqrt{2}}{t + \sqrt{t^2 + w_1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(t + \sqrt{t^2 + w_1} - \sqrt{w_1})}{\sqrt{w_1}(t + \sqrt{t^2 + w_1})} < \frac{\sqrt{2}(t + t)}{\sqrt{w_1}(t + \sqrt{t^2 + w_1})} \\ &= \frac{2\sqrt{2}t}{\sqrt{w_1}(t + \sqrt{t^2 + w_1})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{w_1}(1 + \sqrt{1 + \frac{w_1}{t^2}})} \\ &< \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{w_1}(1 + \sqrt{1 + \frac{w_1}{\bar{t}^2}})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{w_1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{w_1}{\left(\frac{w_1\delta^2}{2\sqrt{\gamma(2\gamma - \delta\sqrt{2w_1})}}\right)^2}}\right)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{w_1}\left(1 + \sqrt{\frac{(2\sqrt{2}\gamma - \delta\sqrt{w_1})^2}{(\sqrt{w_1}\delta)^2}}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{w_1}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}\gamma - \delta\sqrt{w_1}}{\sqrt{w_1}\delta}\right)} = \frac{\delta}{\gamma}. \end{aligned}$$

q.e.d

5. Algorithm and its Properties

5.1 Algorithm

In this section, we propose an algorithm of our smoothing method. For simplicity, we put $z^{(k)} := (x^{(k)}, y^{(k)})$.

Algorithm 5.1

Step 0. Choose $\eta, \rho \in (0,1), \bar{\eta} \in (0, \eta],\ \sigma \in (0, 1/2),\ \kappa > 0$, and $\hat{\kappa} > 0$. Choose $z^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in R^{2n}$ and $\beta_0 \in (0, \infty)$. Let $t_0 := \|H_{FB}(z^{(0)})\|$. Set $k := 0$.

Step 1. If $\|H_{FB}(z^{(k)})\| = 0$ is satisfied, then stop.

Step 2.

Step 2.0. Set $v^{(0)} := z^{(0)}$ and $j := 0$.

Step 2.1. Compute $d^{(j)} \in R^{2n}$ by solving

$$H_{t_k}(v^{(j)}) + \nabla H_{t_k}(v^{(j)})^T d^{(j)} = 0. \tag{5.1}$$

Step 2.2. If $\|H_{t_k}(v^{(j)} + d^{(j)})\| \leq \beta_k$, then $z^{(k+1)} := v^{(j)} + d^{(j)}$ and go to Step 3. Otherwise, go to Step 2.3.

Step 2.3. Let m_j be the smallest nonnegative integer m satisfying

$$\psi_{t_k}(v^{(j)} + \rho^m d^{(j)}) \leq (1 - 2\sigma\rho^m)\Psi_{t_k}(v^{(j)}). \tag{5.2}$$

Let $\tau_j := \rho^{m_j}$, and $v^{(j+1)} := v^{(j)} + \tau_j d^{(j)}$.

Step 2.4. If

$$\|H_{t_k}(v^{(j+1)})\| \leq \beta_k, \tag{5.3}$$

then let $z^{(j+1)} := v^{(j+1)}$ and go to Step 3. Otherwise, set $j := j + 1$ and go back to Step 2.1.

Step 3. Update the parameters as follows:

$$\begin{aligned}
\delta_{k+1} &:= \|H_{FB}(z^{(k+1)})\| \\
t_{k+1} &:= \min\left\{\kappa\delta_{k+1}^2,\ t_0\bar{\eta}^{k+1},\ \bar{t}(z^{(k+1)}, \hat{\kappa}\delta_{k+1})\right\} \\
\beta_{k+1} &:= \beta_0\eta^{k+1}.
\end{aligned}$$

Step 4. Set $k := k + 1$. Go back to Step 1.

5.2 Convergence

To show the global convergence property of Algorithm 5.1, we introduce the following lemma.

Lemma 5.1 (Mountain Pass Theorem) *Let $\theta : R^n \to R$ be a continuously differentiable and level-bounded function. Let $C \subset R^n$ be a nonempty and compact set and ξ be a minimum value of θ on the boundary of C, that is,*

$$\xi := min_{x \in \partial C} \theta(x).$$

Assume that there exit points $p \in C$ and $q \notin C$ such that $\theta(p) < \xi$ and $\theta(q) < \xi$. Then, there exists a point $r \in R^n$ such that $\nabla \theta(r) = 0$ and $\theta(r) \geq \xi$.

Lemma 5.2 *If $f : R^n \to R^n$ is monotone, then for any $t > 0$, every satationary point $(\bar{x}, \bar{y})$ of the function Ψ_t satisfies $\Psi_t(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.*

Proof.

$$\nabla \Psi_t(\bar{x}, \bar{y}) = 2\nabla H_t(\bar{x}, \bar{y}) H_t(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Since $\nabla H_T(\bar{x}, \bar{y})$ is nonsingular, we have $H_t(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, that is, $\Psi_t(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

q.e.d.

From (3.4), we have the following lemma:

Lemma 5.3 *Let $C \subset R^n \times R^n$ be a compact set. Then, for any given $\delta > 0$, there exist $t' > 0$ such that*

$$|\Psi_t(x, y) - \Psi_{FB}(x, y)| \leq \delta$$

for any $(x, y) \in C$ and $t \in [0, t']$.

By using Mountain Pass Theorem, Lemma 5.2 and Lemma 5.3, we can establish the following convergence theorem of Algorithm 5.1.

Note that for using Mountain Pass Theorem, we need the level boundness of $\Psi_{FB}(\cdot)$. The fact is proved by S. Pan and J-S. Chen [19] for a function with the uniform Cartesian P-property (is defined below) and satisfies some condition (that is Condition A).

Definition 5..1 *Given a mapping $f = (f_1, ..., f_q)$ with $f_i : R^n \to R^{n_i}$, where $n_1 + ... + n_q = n$, f is said to have* **the uniform Cartesian P-property** *if for any $x = (x_1, ..., x_q)$, $y = (y_1, ..., y_q) \in R^n$, there is an index $v \in \{1, 2, ..., q\}$ and a positive constant $\rho > 0$ such that*

$$< x_v - y_v,\ f_v(x) - f_v(y) > \geq \ \rho \|x - y\|^2.$$

Theorem 5.1 *Let $f : R^n \to R^n$ be a function with the uniform Cartesian P-property and satisfies Condition A. Assume that the solution set S of SOCCP (3.2) is nonempty and bounded. Let $\{(x^k, y^k)\}$ be a sequence generated by Algorithm 5.1. Then, $\{(x^k, y^k)\}$ is bounded, and every accumulation point is a solution of SOCCP (3.2).*

Proof. It is sufficient to show only the boundedness of $\{(x^k, y^k)\}$. Assume that $\{(x^k, y^k)\}$ by Algorithm 5.1 is not bounded.

- $\exists\, K :$ subsequence $\{(x^k, y^k)\}_{k\in K}$ such that $\lim_{k\to\infty, k\in K}\|(x^k, y^k)\| = \infty$.
- $\exists$ compact set $C \subset R^n \times R^n$ such that $S \subset \text{int}\, C$ because of boundness of S.

Thus, we have

(a) $(x^k, y^k) \notin C \quad$ for $\quad \forall k \in K \quad$ and $\quad k \gg 0$.

(b) $\bar{\xi} := \min_{(x,y)\in\partial C} \Psi_{FB}(x, y) > 0$.

From Lemma 5.3 with $\delta := \bar{\xi}/4 > 0$,

$$\Psi_{t_k}(x, y) - \Psi_{FB}(x, y) \leq \frac{1}{4}\bar{\xi} \tag{5.4}$$

$$\Psi_{t_k}(x, y) - \Psi_{FB}(x, y) \geq -\frac{1}{4}\bar{\xi} \tag{5.5}$$

for $\forall (x, y) \in C$ and $k \gg 0$. Let $(\bar{x}, \bar{y}) \in S \subset C$. From (5.4),

$$\Psi_{t_k}(\bar{x}, \bar{y}) - \Psi_{FB}(\bar{x}, \bar{y}) = \Psi_{t_k}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{1}{4}\bar{\xi} \tag{5.6}$$

for $\forall k \in K,\ \ k \gg 0$. On the other hand, letting $(\bar{x^k}, \bar{y^k})$ be min of $\Psi_{t_k}(x, y)$ on ∂C, for $\forall k \in K$ and $k \gg 0$,

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)\in\partial C} \Psi_{t_k}(x, y) &= \Psi_{t_k}(\bar{x^k}, \bar{y^k}) \\ &\geq -\frac{1}{4}\bar{\xi} + \Psi_{FB}(\bar{x^k}, \bar{y^k}) \\ &\geq -\frac{1}{4}\bar{\xi} + \bar{\xi} = \frac{3}{4}\bar{\xi}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

since (5.5) and (b). Furthermore, from $\|H_{t_k}(\cdot)\| \leq \beta_k$ in Step 2 of Algorithm 5.1 and $\Psi_{t_k}(\cdot) = \frac{1}{2}\|H_{t_k}(\cdot)\|^2$, we can put

$$\Psi_{t_k}(x^{k+1}, y^{k+1}) \leq \frac{1}{4}\bar{\xi} \tag{5.8}$$

for $\forall k \in K,\ \ k \gg 0$. Now let $k \in K,\ \ k \gg 0$ satisfying (a), (5.6), (5.7) and (5.8). Then by applying Mountain Pass Theorem to Ψ_{t_k} with $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ and $(x^{k+1}, y^{k+1}) \notin C$ and $\xi := \min_{(x,y)\in\partial C} \Psi_{t_k}(x, y) \geq (3/4)\bar{\xi} > 0$, we obtain

$$\exists r := (\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{such that} \quad \nabla \Psi_{t_k}(r) = 0 \quad \text{and} \quad \Psi_{t_k}(r) \geq \frac{3}{4}\bar{\xi}.$$

This contradicts Lemma 5.2. Therefore, $\{(x^k, y^k)\}$ is bounded.

q.e.d.

Theorem 5.2 *f is monotone. Let (x^k, y^k) by Algorithm 5.1. Assume that*

(i) *The solution set of SOCCP (3.2) is nonempty and bounded*

(ii) *Any accumulation point of $\{\nabla H_{t_k}(x^k, y^k)\}$ is nonsigular*

then the sequence $\{(x^k, y^k)\}$ converges to a solution (x^*, y^*) of SOCCP (3.2) quadratically.

Proof. Let $z := (x, y)$. Let $H_{FB}(z^*) = 0$. Note

$$\exists\, C > 0 \qquad \text{such that} \qquad \|\nabla H_{t_k}(z^k)^{-T}\| \le C \quad \text{for } \ k \gg 0.$$

We show $\|z^k + d^k - z^*\| = O(\|z^k - z^*\|^2)$ for $k \gg 0$.

$$\begin{aligned}
\|z^k + d^k - z^*\| &= \|z^k - \nabla H_{t_k}(z^k)^{-T} H_{t_k}(z^k) - z^*\| \\
&\le \|\nabla H_{t_k}(z^k)^{-T}\| \|\nabla H_{t_k}(z^k)^T (z^k - z^*) - H_{t_k}(z^k)\| \\
&\le C \left\{ \|(\nabla H_{t_k}(z^k) - V_k)^T (z^k - z^*)\| + \|V_k^T (z^k - z^*) - H'_{FB}(z^*; z^k - z^*)\| \right\} \\
&+ C\|H'_{FB}(z^*; z^k - z^*) - H_{FB}(z^k) + H_{FB}(z^*)\| \\
&+ C\|H_{FB}(z^k) - H_{t_k}(z^k)\|, \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

where $V_k \in \partial H_{FB}(z)$.

From the fact that H_t satisfies the Jacobian consistency, the definition of $\bar{t} := \bar{t}(z^{k+1}, \hat{\kappa}\|H_{FB}(z^{k+1})\|)$ in Step 3 of Algorithm 5.1 and the local Lipchitz continuity of H_{FB},

$$\begin{aligned}
\|\nabla H_{t_k}(z^k) - V_k\| &\le \hat{\kappa}\|H_{FB}(z^k)\| \\
&= \hat{\kappa}\|H_{FB}(z^k) - H_{FB}(z^*)\| \\
&\le \hat{\kappa} L \|z^k - z^*\|. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

By (5.10), the first term of the second inequarity of (5.9) is $O(\|z^k - z^*\|^2)$. The second and third term of the second inequarity of (5.9) are also $O(\|z^k - z^*\|^2)$, since H_{FB} is strongly semismooth and directionary differentiable, because the strongly semismooth of ϕ_{FB} has been proved in Corollary 3.3 in [18]. For the last term of the second inequarity of (5.9),

$$\begin{aligned}
\|H_{t_k}(z^k) - H_{FB}(z^k)\| &\le \sqrt{2}\|t_k| = O(\|H_{FB}(z^k)\|^2) \\
&= O(\|z^k - z^*\|^2)
\end{aligned}$$

since $\|H_t(z) - H_{FB}(z)\| \leq \sqrt{2}t$ because we get $\|H_t(z) - H_{FB}(z)\| = \|\phi_t(z) - \phi_{FB}(z)\| \leq \sqrt{2}t$ by Fukushima et al. [13]. Step 3 of Algorithm 5.1, $H_{FB}(z^*) = 0$ and local Lipsctitz continuity of H_{FB}. Consequently, we have

$$\|z^k + d^k - z^*\| = O(\|z^k - z^*\|^2).$$

Thus, we can get the result.

q.e.d.

5.3 Numerical experiments

We executed numerical experiments to compare the algorithm proposed with Algorithm 2 in Hayashi et al. [14]. The program was coded in MATLAB 7. The computation was carried out on a Compaq nx 9030.

5.3.1 Linear case

The problem is to find $(x, y) \in R^n \times R^n$ such that

$$x \in \mathcal{K}, \qquad y \in \mathcal{K}, \qquad x^T y = 0, \qquad y = Mx + q,$$

where $M \in R^{n \times n}$ is a rank-deficient positive semidefinite matrix, $q \in R^n$, and $\mathcal{K} \subset R^n$ is the Cartesian product of second-order cones, that is, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ with $n = n_1 + \cdots + n_m$. We choose $\gamma = 0.4$, $\rho = 0.5$, $\sigma = 0.4$ κ and $\bar{\kappa} = 1.0$ in the algorithm.

In order to obtain a positive semidefinite matrix M with rank $M = r < n$, we let $M := nBB^T/\|BB^T\|$, where $B \in R^{n \times r}$ is a matrix of which components are randomly chosen from the interval $[-1, 1]$. Furthermore, we let $q := 10^\alpha n^{1/2} p - Me$, where $e = (1, 0, ...0)^T \in \mathrm{int}\mathcal{K}^n$, and α is randomly chosen from the interval $[-1, 1]$. The vector $p := 2^{-1/2}\cos\theta(1, w/\|w\|) + 2^{-1/2}\sin\theta(1, -w/\|w\|)$ is chosen as a vector such that $p \in \mathrm{int}\mathcal{K}^n$ and $\|p\| = 1$, where the components of w are randomly chosen from the interval $[-1, 1]$, and $\theta = \pi/5$. This technique is due to Hayashi et al. [14] except for using fixed $\theta = \pi/5$.

When we have $r = 0.7 * n$ and $\mathcal{K} = [2, 2, n-6, 1, 1]$, Table 5.1 shows the number of iterations (Iter) and CPU time in second (CPU) required to solve test problems of size n for the proposed method and Hayashi method [14]. The results are those for the average of some runs for each n.

Table 5.1

	Proposed	Method	Hayashi	Method
n	Iter	CPU	Iter	CPU
500	4	12.9186	6	7.5308
800	4	45.7157	6	25.4065
1000	4	74.7775	6	46.1363

Acknowledgment

The author would like to express my appreciation to Associate Professor H. Ogasawara of Tokyo University of science for the idea of the Jacobian consistency property and update of an outside parameter.

References

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-order cone programmming, *Mathematical Programming* Vol. 95 (2003) 3-51.

[2] Z. Cai and K.-C. Toh, Solving second order cone programming via a reduced augmented system approach, *SIAM Journal on Optimization* Vol. 17 (2006) 711-737.

[3] C. Chen and O. L. Mangasarian, Smoothing methods for convex inequalities and linear complementarity problems, *Mathematical Programming* Vol. 71 (1995) 51-69.

[4] X. Chen, L. Qi and D. Sun, Global and superlinear convergence of smoothing Newton method and its application to general box constrained variational inequarities, *Mathematics of Computation* Vol. 67 (1998) 519-540.

[5] X. Chen, Smoothing methods for complementarity problems and their applications: a survey, *Journal of Operations Research Society of Japan* Vol. 43 (2000) 32-47.

[6] X. D. Chen, D. Sun and J. Sun, Complemenarity functions and numerical experiments on some smoothing Newton Methods for second-order-cone complementartiy problems, *Computaional Optimization and Applications* Vol.25 (2003) 39-56.

[7] J. S. Chen, X. Chen and P. Tseng, Analysis of nonsmooth vector-valued functions associated with second-order cones, *Mathematical Programming* Vol. 101 (2004) 95-117.

[8] J. S. Chen and P. Tseng, An unconstrained smooth minimization reformulation of the second-order cone complementarity problem, *Mathematical Programming* Vol. 104 (2005) 293-327.

[9] J. S. Chen, Two classes of merit functions for the second-order cone complementarity problem, *Mathematical Methods of Operations Research* Vol. 64 (2006) 495-519.

[10] J. S. Chen, A new merit function and its related properties for the second-order cone complementarity problem, *Pacific Journal of Optimization* Vol. 2 (2006) 167-179.

[11] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* (Wiley, New York, 1983).

[12] F. Facchinei and J. - S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementartiy Problems,* (Springer-Verlag, New York, 2003).

[13] M. Fukushima, Z. Q. Luo and P. Tseng, Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization* Vol. 12 (2001) 436-460.

[14] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, A combined smoothing and regularation method for monotone second-order-cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization* Vol. 15 (2005) 593-615.

[15] R. Mifflin, Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization, *SIAM Journal on Control Opimization* Vol. 15 (1977) 959-972.

[16] C. Kanzow, Some noninterior continuation methods for linear complementarity problems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* Vol. 17 (1996) 851-868.

[17] R. D. C. Monteiro and T. Tsuchiya, Polynomial convergence of primal - dual algorithms for the second - order cone program based on the MZ - family of directions, *Mathematical Programming* Vol. 88 (2000) 61-83.

[18] D. Sun and J. Sun, Strong semismoothness of the Fischer-Burmeister SDC and SOC complementarity functions, *Mathematical Programming* Vol. 103 (2005) 575-581.

[19] S. Pan and J-S. Chen, A damped Gauss - Newton method for the second - order cone complementarity problem, *Applied Mathematics and Optimization* Vol. 59 (2009) 293-318.

[20] L. Qi and D. Sun, A nonsmooth version of Newton's method, *Mathematical Programming* Vol. 58 (1993) 353-367.

[21] L. Qi, D. Sun and G. Zhou, A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequalities, *Mathematical Programming* Vol. 87 (2000) 1-35.

[22] T. Tsuchiya, A polynomiyal primal - dual path - following algorithm for second - order cone programming, *Reseach Memorandum* No. 649 (1997) The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, Japan, October (Reviesed: December 1997).

[23] T. Tsuchiya, A convergence analysis of the scaling - invariant primal - dual path - following algorithms for second - order cone programming, *Optim. Methods Software* Vol. 11 and 12 (1999) 141-181.

Appendix

A Level-boundednes of the merit function and its smoothing function

We prove that if f has the uniform Cartesian P-property and satisfies some condation(Condition A), then the merit function ψ_{FB} and its smoothing function ψ_t are level-bounded. Since the level-boundedness of a function $\psi : R^n \to R$ is equivalent to

$$\lim_{\|z\|\to\infty}\psi(z) = +\infty, \tag{1.1}$$

we show (1.1)instead of the boundedness of the level set $L_\alpha := \{z|\psi(z) \leq \alpha\}$. Now, let the function $\tilde{\psi}_{FB} : R^n \to R$ be defined by

$$\tilde{\psi}_{FB}(x) := \|\phi_{FB}(x, f(x))\|.$$

Condition A[19] For any $\{x^k\} \subseteq R^n$ such that $\|x^k\| \to +\infty$, if there exists $i \in \{1, 2, .., m\}$ such that $\lambda_1(x_i^k),\ \lambda_1(f_i(x^k)) > -\infty$ and $\lambda_2(x_i^k),\ \lambda_2(f_i(x^k)) \to \infty$, then

$$\limsup_{k\to+\infty} \left\langle \frac{x_i^k}{\|x_i^k\|}, \frac{f_i(x^k)}{\|f_i(x^k)\|} \right\rangle > 0.$$

Lemma A.1[19] If f has the uniform Cartesian P-property and satisfies Condition A, then the merit function $\tilde{\psi}_{FB}(x)$ is level-bounded.

Lemma A.2 $\tilde{\psi}_{FB}(x)$ is level-bounded if and only if $\psi_{FB}(x)$ is level-bounded.

Proof. $\Longleftarrow$ Suppose that

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}\psi_{FB}(x, y) = +\infty. \tag{1.2}$$

Let $\{x^{(k)}\}$ be an arbitrary sequence such that $\|x^{(k)}\| \to \infty$ and $\{y^{(k)}\}$ be the corresponding sequence such that $y^{(k)} = f(x^{(k)})$ for all k. Then we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{\psi}_{FB}(x^{(k)})^2 &= \frac{1}{2}\|\phi_{FB}(x^{(k)}, f(x^{(k)})\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\phi_{FB}(x^{(k)}, y^{(k)})\|^2 + \frac{1}{2}\|f(x^{(k)}) - y^{(k)}\|^2 \\
&= \psi_{FB}(x^{(k)}, y^{(k)}),
\end{aligned}$$

where the second equality follows from $y^{(k)} = f(x^{(k)})$. From that $\|(x^{(k)}, y^{(k)})\| \to \infty$ and (1.2), we have $\lim_{k\to\infty}\tilde{\psi}_{FB}(x^{(k)}) = +\infty$.

$\Longrightarrow$ Suppose that $\tilde{\psi}_{FB}(x)$ is level-bounded. From $\sqrt{2\|\xi\|+2\|\eta\|} \geq \|\xi\|+\|\eta\|$ for any $\xi,\ \eta \in R^n$, we have

$$\begin{aligned}
2\sqrt{\psi_{FB}(x,y)} &\geq \|x+y-(x^2+y^2)^{1/2}\|+\|f(x)-y\| \\
&\geq \|x+f(x)-(x^2+f(x)^2)^{1/2}\|-\|f(x)-(x^2+f(x)^2)^{1/2}\|+\|y-(x^2+y^2)^{1/2}\|+\|f(x)-y\| \\
&= \tilde{\psi}_{FB}(x),
\end{aligned}$$

since the last equation follows from $y=f(x)$. Hence, ψ_{FB} is level-bounded from the assumption that $\tilde{\psi}_{FB}$ is level-bounded.

q.e.d

Theorem A.1 If f has the uniform Cartesian P-property and satisfies Condition A, then ψ_t is level-bounded.

Proof. From (3.4) of the body, we have

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\psi_{FB}(x,y)} &= \left\| \begin{pmatrix} \phi_{FB}(x,y) \\ f(x)-y \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \phi_t(x,y) \\ f(x)-y \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \phi_{FB}(x,y)-\phi_t(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{2\psi_t(x,y)}+\sqrt{2}t.
\end{aligned}$$

Therefore, since ψ_{FB} is level-bounded, ψ_t is level-bounded.

q.e.d

B An estimation $\gamma(z)$ in Proposition 4.2

An estimation $\gamma(z)$ for $\Gamma(z) \leq \gamma(z)$ where $\Gamma(z) := \left\| \begin{matrix} L_x \\ L_y \end{matrix} \right\|$ with $z := (x,y)$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) := \left\| \begin{matrix} L_x \\ L_y \end{matrix} \right\| &\leq \sqrt{\|L_x\|^2+\|L_y\|^2} \\
&\leq \|L_x\|+\|L_y\| \\
&= \|x\|+\|y\|,
\end{aligned}$$

because $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$ for $a,\ b \geq 0$.

Therefore we obtain $\gamma(z)=\|x\|+\|y\|$.

彙　　報

2008 年度事業報告（抄）

1.「経営総合科学」の刊行

第 91 号　　2008 年 9 月 21 日（発行）

論　　説

静岡県における商圏および消費者行動の意識特性 ……… 神 頭 広 好
徳永美津男

会計教育についての現場からの提言 ……………………… 田 中 孝 治

ハイアールの国際マーケティング
—アメリカにおける戦略を中心に— …………………… 柯　　麗 華

A Smoothing Newton Method with Fischer-Burmeister Function for Second-Order-Cone Complementarity Problems
…………………………………………………………… Nobuko Sagara

Is Central Franc Zone Suitable for Introducing a Common Currency?
………………………………………………………… Yutaka Kurihara

2.「愛知大学総合科学研究所叢書」の刊行

33　都市と立地と幾何学　—新しい立地論の方向性—
神頭広好
2008 年 5 月 30 日（発行）

34　観光とまちづくり　—岩国市、尾道市を中心にして—
神頭広好・角本伸晃・麻生憲一
2009 年 3 月 30 日（発行）

３．講演会

2008年度の開催はありませんでした。

４．企業調査

期　日　　2008年11月7日（金）・8日（土）

調査先　　新日本石油精製株式会社　仙台製油所

５．共同研究

地域活性化における観光の役割（2008年度～2009年度事業）

藤井孝宗　准教授

神頭広好　教授

成沢広幸　准教授（長崎国際大学）

麻生憲一　教授（奈良県立大学）

角本伸晃　教授（椙山女学園大学）

長橋　透　教授（青山学院大学）

廣田政一　教授（目白大学）

執筆者紹介（執筆順）

神 頭 広 好	愛知大学経営学部教授
栗 原 　 裕	愛知大学経済学部教授
加 藤 義 幸	愛知大学会計大学院教授
栗濱竜一郎	愛知大学会計大学院准教授
相 良 信 子	愛知大学経営総合科学研究所名誉研究員

資料交換の場合は，お手数ながら下記あてまでお送りください。

印刷　2010 年 2 月 28 日　　経営総合科学　第 93 号

発行　2010 年 2 月 28 日

編集者代表　神　頭　広　好

印刷・製本　㈱クイックス

発行所　**愛知大学経営総合科学研究所**

〒 470-0296　愛知県みよし市黒笹町清水 370

TEL0561-36-5531　FAX0561-36-5532

THE
KEIEI SOGO KAGAKU

(JOURNAL OF MANAGERIAL RESEARCH)

No. 93 2010・2

CONTENTS

Articles

PUBLISHED
BY
INSTITUTE OF MANAGERIAL RESEARCH
NAGOYA, JAPAN